Философские аспекты теории бесконечных множеств Георга Кантора

Рейтер Кирилл Александрович

Кандидат философских наук

Доцент ВАК

SPIN-код: 5898-5790

Аннотация: В статье рассматриваются философские аспекты «краеугольного камня» математики – теории множеств, созданную в конце XIX века Георгом Кантором. Идеи Кантора прошли сложный эволюционный путь от резкой критики и «тяжелой болезни», как выражался Анри Пуанкаре, до всемирного признания

Ключевые слова: парадокс, числа, множество, бесконечность, трансформация.

«Никто не изгонит нас из рая, который основал Кантор»

Давид Гильберт

Одному из величайших математиков за всю историю человечества Георгу Кантору суждено было стать «возмутителем спокойствия» в математике XIX-го века. Главным достижением Кантора стало создание теории бесконечных множеств. И главная его идея состояла в решительном отказе от тезиса Аристотеля «Infinitum Actu Non Datu» и рассмотрении бесконечных множеств, как актуально бесконечных множеств.

Природа бесконечности всегда была предметом спора. О том, что она интересовала ещё древних мыслителей, свидетельствуют знаменитые парадоксы Зенона Элейского, который доказывал, что движение мыслить невозможно, поскольку движущийся объект проходит бесконечное число точек в конечное время. Разработанное Исааком Ньютоном в XVII в. исчисление бесконечно малых позволило по-новому подойти к описанию движения, однако математически строгая формулировка инфинитезимальных идей была предложена лишь спустя два с лишним столетия. Большинство математиков XIX в., в числе которых Петер Густав Лежен-Дирихле, Карл Вейерштрасс и Рихард Дедекинд, стремились свести математику к ясному и отчетливому конечному, принимая бесконечное как «простое вспомогательное понятие нашего мышления, понятие отношения, которое < … > заключает в себе идею изменчивости и о котором, таким образом, никогда нельзя сказать «Datur» в собственном смысле слова»[1]. Бесконечное понималось как значение переменной, неограниченно убывающей или растущей, но всегда конечной величины – становящееся и несовершенное потенциально бесконечное.

Впоследствии проблемы, связанные с бесконечностью, стали рассматриваться в теории множеств, ставшей по существу фундаментом современной математики. Следует отметить, что в ходе своего развития идея бесконечности имела теологический оттенок, порой игравший определённую роль в решении вопроса о приемлемости математических и философских теорий, связанных с понятием бесконечности. Всё сказанное имеет отношение к жизни и деятельности немецкого математика Георга Кантора.

Теория Кантора о трансфинитных числах первоначально была воспринята настолько нелогичной, парадоксальной и даже шокирующей, что натолкнулась на резкую критику со стороны математиков-современников, в частности, известного исследователя арифметической теории алгебраических величин Леопольда Кронекера и главы Парижской академии наук Анри Пуанкаре; позднее – один из крупнейших философов

[1] Кантор Г. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985. – С. 85.

XX века Людвиг Витгенштейн высказал возражения философского плана с горечью отмечая, что математика «истоптана вдоль и поперёк разрушительными идиомами теории множеств», которое он отклоняет как «шутовство», «смехотворное» и «ошибочное». Некоторые христианские богословы, увидели в работе Кантора вызов уникальности абсолютной бесконечности природы Бога, приравняв однажды теорию трансфинитных чисел и пантеизм.

Основой теории Кантора служит понятие взаимно-однозначного соответствия между элементами двух множеств. Говорят, что элементы двух множеств можно поставить во взаимно-однозначное соответствие, если каждому элементу первого множества можно поставить в соответствие элемент второго множества, разным – разные, и при этом каждый элемент второго множества будет соответствовать какому-то элементу первого. Про такие множества говорят, что они эквивалентны, что они имеют одинаковую мощность, или одинаковое кардинальное число. Если же можно доказать, что элементы множества А можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с элементами подмножества В1 множества В, а элементы множества В нельзя поставить во взаимнооднозначное соответствие с элементами А, то тогда говорят, что мощность множества В больше мощности множества А. Эти определения применимы и к конечным множествам. В этом случае мощность представляет собой аналог конечных чисел. Но бесконечные множества имеют в этом смысле парадоксальные свойства. Бесконечное множество оказывается эквивалентным своей части, например, так, как это происходит в аксиоме Евклида, утверждающей, что целое больше любой из своих собственных частей, где под собственной частью понимается часть, не совпадающая со всем целым, и противоречащим ей знаменитом парадоксе Галилея, где в множестве натуральных чисел столько же, сколько квадратов натуральных чисел, то есть:

$$1, 2, 3, 4, ..., n, ...$$

$$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$$

$$2, 4, 6, 8, ..., 2n, ...$$

По сути Кантор воспользовался указанным Галилеем парадоксом и превратил его в средство количественного сравнения бесконечных множеств. Он назвал два множества эквивалентными, если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие. Предположим, у нас имеется ведёрко, заполненное чёрными и цветными шариками. Каким образом можно сравнить количество чёрных и цветных шариков? Простейший способ состоит в извлечении шариков из ведёрка парами, состоящими из чёрного и цветного шариков. Если каждый шарик может быть объединён в пару с шариком другого цвета, то два множества эквивалентны. Если нет, то оставшиеся в ведёрке шарики показывают, каких шариков было больше.

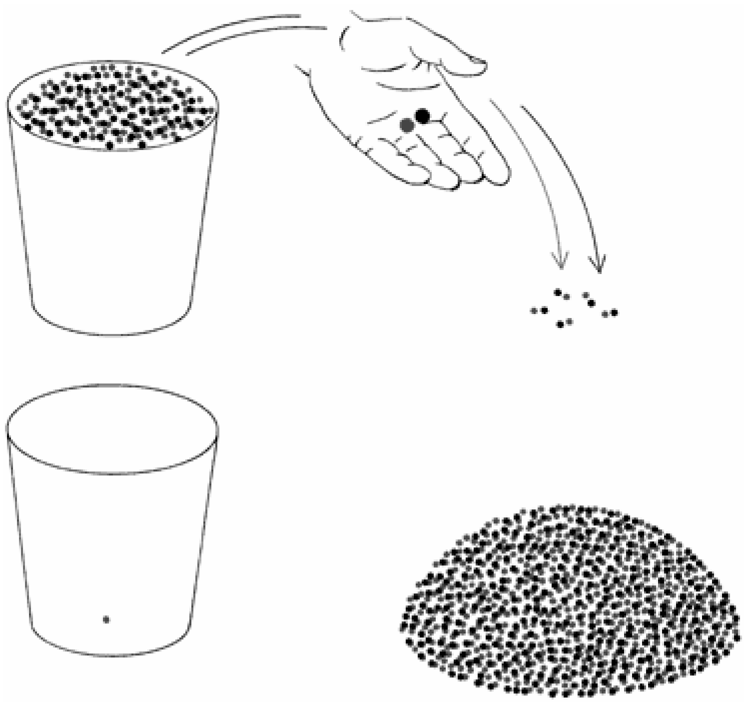

Рис. 1. Демонстрация количественного сравнения бесконечных множеств.

Используя принцип взаимно однозначного соответствия, Кантор показал, что свойство, которое Галилео Галилей рассматривал как парадоксальное, фактически является естественным свойством бесконечных множеств. Множество чётных чисел эквивалентно множеству всех целых положительных чисел, чётных и нечётных, вместе взятых, поскольку объединение в пары элементов каждого из этих множеств может быть осуществлено без опущения каких-либо элементов рассматриваемых множеств.

Эти парадоксы были известны давно, и именно они, в частности, служили препятствием для рассмотрения актуально бесконечных множеств. То, что здесь просто сказывается специфика актуально бесконечного, объяснял в «Парадоксах бесконечного» автор первой строгой теории вещественных чисел Бернард Больцано. Немецкий математик, известный, в первую очередь, работами по общей алгебре Рихард Дедекинд считал это свойство актуально бесконечных множеств характеристическим.

В продолжении Кантор развивает арифметику кардинальных чисел. Суммой двух кардинальных чисел является мощность объединения соответствующих им множеств, произведением – мощность т.н. множества-произведения двух данных множеств и т.д. Важнейшим оказывается переход от данного множества к множеству-степени, т.е., по определению, к множеству всех подмножеств исходного множества. Кантор доказывает основополагающую для его теории теорему: мощность множества-степени больше мощности исходного множества. Если мощность исходного множества записать через a, то в соответствии с арифметикой кардинальных чисел мощность множества-степени будет 2a, и мы имеем, следовательно, 2a > a. Значит, переходя от некоторого бесконечного множества, напр. от множества всех натуральных чисел, имеющего мощность $\aleph\alpha$ (обозначение Кантора) к множеству всех подмножеств этого множества, к множеству всех подмножеств этого нового множества и т.д., мы будем получать ряд множеств все более возрастающей мощности. Есть ли какой-то предел этому возрастанию? Ответить на этот вопрос можно, только введя в рассмотрение некоторые дополнительные понятия.

Оперировать с бесконечными множествами, лишенными всякой дополнительной структуры, вообще говоря, невозможно. Поэтому Кантор ввел в рассмотрение упорядоченные множества, т.е. множества, для любых двух элементов которых определено отношение «больше»> (или «меньше» <). Это отношение должно быть транзитивным: из $a < b$ и $b < c$ следует: $a < c$. Собственно, наиболее продуктивным для теории множеств является еще более узкий класс множеств: вполне упорядоченные множества. Так называются упорядоченные множества, у которых каждое подмножество имеет наименьший элемент. Вполне упорядоченные множества легко сравнивать между собой: они отображаются одно на часть другого с сохранением порядка. Символы вполне упорядоченных множеств, или ординальные (порядковые) числа, также образуют вполне упорядоченное множество, и для них также можно определить арифметические действия: сложение (вычитание), умножение, возведение в степень. Ординальные числа играют для бесконечных множеств роль порядковых чисел, кардинальные – роль количественных. Множество (бесконечное) определенной мощности можно вполне упорядочить бесконечным числом способов, каждому из которых будет соответствовать свое ординальное число. Тем самым каждому кардиналу (Кантор ввел для обозначения кардиналов «алефы» – первую букву еврейского алфавита с индексами) אα будет соответствовать бесконечно много ординалов:

0 1 2 ... ω0, ω0 + 1 ... ω1... ω2 ... ωn ... ωω0 ... Ω (ординалы)

0 1 2 ... א0 ... א1 ... א2 אn …א ω0 … τ («тау»-кардиналы)

Согласно теоремам теории множеств любой «отрезок» шкалы Ω ординальных чисел, сам как множество вполне упорядоченное, будет иметь больший ординал, чем все заключенные в этом отрезке. Отсюда вытекает, что невозможно рассматривать все Ω как множество, т.к. в противном случае Ω имело бы своим ординалом β, которое больше всех ординалов в Ω, но поскольку последнее содержит все ординалы, т.е. и β, то было бы: $\beta > \beta$ (парадокс Бурали – Форти, 1897). Кантор стремился обойти этот парадокс введением (с 1880-х гг.) понятия консистентноссти. Не любая множественность (Vielheit) есть множество (Menge). Множественность называется консистентной, или множеством, если ее можно рассматривать, как законченное целое. Если же допущение «совместного бытия» всех элементов множественности ведет к противоречию, то множественность оказывается неконсистентной, и ее, собственно, нельзя рассматривать в теории множеств. Такими неконсистентными множествами оказываются, в частности, Ω – множество всех ординальных чисел и τ («тау») – множество всех кардиналов («алефов»). Тем самым мы опять возвращаемся к бесконечности как к процессу. Вводя трансфинитные числа как особые объекты математики, Кантор фиксирует бесконечное в качестве собственного понятия математической науки. Более того, разрешая операции над трансфинитными числами, Кантор тем самым позволяет обращаться с бесконечным как вполне определенным объектом – ставшим и совершенным – актуально бесконечным.

По мнению чешского математика, XX века Петра Вопенка, теория множеств, усилия которой были направлены на актуализацию потенциальной бесконечности, оказалась неспособной потенциальность устранить, а только смогла переместить ее в более высокую сферу. Это не смущало, однако, самого Кантора. Он считал, что шкала «алефов» поднимается до бесконечности самого Бога и поэтому то, что последняя оказывается математически невыразимой, было для него само сабой разумеющимся: «Я никогда не исходил из какого-либо «Genus supremum» актуальной бесконечности. Совсем наоборот, я строго доказал абсолютное несуществование «Genus supremum» для актуальной бесконечности. То, что превосходит все бесконечное и трансфинитное, не есть «Genus»; это есть единственное, в высшей степени индивидуальное единство, в которое включено все, которое включает «Абсолютное», непостижимое для человеческого понимания. Это есть «Actus Purissimus», которое многими называется Богом»[2].

Источники и литература:

1. Meschkowski H. Zwei unveröffentlichte Briefe Georg Cantors. // Der Mathematikuntemcht. – 1971. № 4. – S. 30-34.
2. Кантор Г. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985.

[2] Meschkowski H. Zwei unveröffentlichte Briefe Georg Cantors. // Der Mathematikuntemcht. – 1971. № 4. – S. 30-34.