

# Введение в анализ данных

В.А. Булычёв, В.В. Кондратьев

## Содержание

<b>1</b>	<b>Общее описание, вклад авторов и благодарности</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Методология работы по средствам автоматизации интеллектуальной деятельности в образовании</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Цели учебного модуля</b>	<b>7</b>
3.1	Основные методологические принципы . . . . .	7
3.2	Необходимые математические знания и навыки . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Практическая применимость в учебном процессе</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Описание и сбор данных. Статистические эксперименты. Вероятность как частота (7-8 классы)</b>	<b>11</b>
5.1	Базовые навыки критического мышления	11
5.2	Таблицы . . . . .	16
5.3	Диаграммы . . . . .	20
5.4	Случайные события . . . . .	22
5.5	Статистический эксперимент . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Теоретические основы статистики. Основные понятия теории вероятностей (8-9 классы)</b>	<b>30</b>
6.1	Комбинаторные сюжеты . . . . .	30

6.2	Оценка вероятностей в простейших случаях . . . . .	34
6.3	Операции над множествами, формула суммы вероятностей и формула включений и исключений . . . . .	41
6.4	Условная вероятность и формула Байеса	45
6.5	Парадоксы теории вероятностей . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Распределения случайных величин (9-11 классы)</b>	<b>57</b>
7.1	Случайная выборка и её представление .	57
7.2	Характеристики среднего: математическое ожидание . . . . .	60
7.3	Характеристики разброса: дисперсия и среднеквадратическое отклонение . . . . .	64
7.4	Распределения случайных величин . . . . .	68
7.5	Коэффициент корреляции . . . . .	72
<b>8</b>	<b>Межпредметные связи. Творческие и проектные задания для старших классов</b>	<b>76</b>
8.1	Экономика и финансы . . . . .	76
8.2	География и логистика . . . . .	77
8.3	Обществознание . . . . .	78
8.4	Агропромышленный комплекс . . . . .	80
<b>9</b>	<b>Список использованных источников</b>	<b>82</b>

## **1 Общее описание, вклад авторов и благодарности**

В документе представлен проект учебного модуля по статистике и анализу данных, предназначенного для учащихся 7-11 классов средней школы, а также для студентов 2 курса бакалавриата по специальности «Педагогическое образование». Актуальность данной работы определяется федеральным проектом "Кадры для цифровой экономики".

**Все предлагаемые задания, методология и количество часов, отводимое на каждую из тем носят предварительный и экспериментальный характер и не могут быть рекомендованы к использованию в образовательных учреждениях без дополнительного тестирования и апробации.**

В.В. Кондратьевым разработана методология работы со средствами автоматизации интеллектуальной деятельности, отобраны цели и содержание учебной программы и спланированы формы учебной деятельности. В.А. Булычёвым внесены существенные предложения для адаптации отобранного содержания для учащихся средней школы, разработана методология работы с динамическими средами для статистического моделирования и разработаны конкретные динамические модели, предназначенные для формирования у учащихся глубокого концептуального понимания изучаемых понятий.

Авторы выражают благодарность А.Л. Семёнову, В.Н. Дубровскому, А.Х. Шеню и Е.А. Бунимовичу за детальное обсуждение проекта и ценные замечания.

Проект выполнен при поддержке РФФИ (проекты 19-29-14217 мк Перспективные направления и формы использования компьютерных технологий в школьном

курсе математики (В.В. Кондратьев), 19-29-14202 мк  
Исследование фундаментальных изменений в образовательных процессах и содержании общего образования при апробации и внедрении цифровых учебно-методических комплексов и учебных симуляторов и оценка их влияния на процессы трансформации образования (В.А. Булычёв))

Последовательность тем опирается на книгу Бунимович Е. А., Булычев В. А. Основы статистики и вероятность. 5-9 кл.: Пособие для общеобразоват. учреждений //М.: Дрофа. – 2004.

## **2 Методология работы по средствами автоматизации интеллектуальной деятельности в образовании**

На основании эмпирического исследования убеждений учителей математики и действующих специалистов в области программирования и анализа данных В.В. Кондратьевым сформулированы следующие принципы работы со средствами автоматизации интеллектуальной деятельности в рамках общего и предпрофессионального образования:

1. При работе по отбору и подготовке учебных заданий по математике необходимо с одной стороны увеличить количество заданий, предполагающих творческий и исследовательский компоненты. Необходимо переходить от передачи „готовых рецептов“ к организации учебной деятельности в режиме „управляемого открытия“. Мышление учащихся формируется не только в ходе отработки механических навыков вычислений, но и в процессе поиска новых подходов к решению задачи или изобретению собственных приёмов устного счёта.

2. При работе с арифметическими операциями необ-

ходимо делать акцент на формировании идиосинкратических алгоритмов и техник устного счёта. Вычисления „в столбик“ на практике не способствуют улучшению навыков устного счёта, а также навыков оценки и прикидки. Кроме заданий, непосредственно тренирующих устный счёт и позволяющих открыть новые закономерности и техники вычислений, связанные с арифметическими действиями, необходимо увеличить количество заданий, непосредственно формирующих у учащихся навыки прикидки и оценки.

3. Для формирования навыков критического мышления, связанных с оценкой правдоподобности результатов вычислений, необходимы сформированные навыки прикидки и оценки. Кроме непосредственных вычислений, необходимо обращать внимание на процесс перехода от реальной ситуации к математической модели, а также на упрощающие предположения, делающие этот процесс возможным. Категорически не рекомендуется игнорировать вопросы учащихся, связанные с когерентностью математических моделей реальности и релевантности изучаемого математического аппарата для практики и профессиональной деятельности.

4. Развитие средств автоматизации интеллектуальной деятельности и технологий искусственного интеллекта приводит к увеличению актуальности психологической установки на автоматизацию интеллектуальной деятельности, в первую очередь сбора и анализа данных. При составлении учебных заданий целесообразно руководствоваться следующими принципами:

1. Данные, с которыми работают учащиеся, берутся из реальной жизни (не придумываются специально для задач)
2. Данные, с которыми работают учащиеся, по тем или иным причинам релевантны для самих уча-

щихся (учащиеся могут отказываться от предлагаемых заданий или придумывать собственные)

3. Данные нужно обсуждать и интерпретировать, подтверждая и опровергая конкретные гипотезы
4. Каждое учебное задание предполагает межпредметность (полученные в ходе работы над заданием знания можно использовать для формирования учебной мотивации к изучению истории, географии, физики, химии, обществознания, экономики и т.д.)

5. Задания для тренировки устного счёта традиционно играли важную метапредметную функцию: способствовали формированию и развитию у учащихся произвольного внимания. С появлением средств автоматизации интеллектуальной деятельности эта функция учебных заданий на устный счёт постепенно сходит на нет. В связи с этим необходимо фундаментальное переосмысление подходов к составлению учебных заданий, в частности, увеличение абсолютного и относительного количества учебных заданий, на сегодняшний день не поддающихся автоматизации. Значительное количество таких задач содержат варианты конкурса „Кенгур“.

6. „Упрощение жизни“, связанное с использованием калькуляторов, можно уравновесить за счёт усложнения концептуальной составляющей учебных заданий

7. В рамках стандартного курса по математике полезно изучать базовые знания и навыки, связанные с логикой и алгоритмами.

8. Необходимо изучать не только навыки оценки и прикидки „в чистом виде“, но задачи с практическим содержанием (релевантным для каждого конкретного учащегося), связанные с оценкой и прикидкой.

### 3 Цели учебного модуля

Целями данного учебного модуля являются:

1. Знакомство с инструментами анализа и визуализации данных (формирование цифровой грамотности)
2. Знакомство с основными понятиями теории вероятностей и статистики (формирование математической грамотности)
3. Знакомство с понятиями "эпистемология" и "интерпретация". Привычка к работе с различными интерпретациями понятий.
4. Формирование привычки учитывать различные точки зрения и различные гипотезы в ходе работы над научной или творческой проблемой.
5. Формирование привычки анализировать ситуации с помощью их формализации и построения модели, формирование и развитие базовых навыков моделирования.
6. Формирование навыков проектирования качественных и количественных исследований, а также постановки эксперимента и эмпирической проверки гипотез (Nullius in verba)

#### 3.1 Основные методологические принципы

При составлении учебных заданий мы руководствуемся следующими принципами:

1. Мы стремимся к тому, чтобы данные, с которыми работают учащиеся, брались из реальной жизни (не придумывались специально для задач). В отдельных

случаях рекомендуется брать данные из школьной жизни (из заданий по другим предметам и различных школьных голосований, опросов и т.д.). Для обеспечения более глубокого понимания вероятности как предельной частоты используются компьютерные эксперименты.

2. Мы стремимся к тому, чтобы данные, с которыми работают учащиеся, по тем или иным причинам были релевантны для самих учащихся (учащиеся могут отказываться от предлагаемых заданий или придумывать собственные). В отдельных случаях предполагаются обязательные задачи, глубокое понимание которых необходимо для изучения важных теоретических понятий. Каждое учебное задание предполагает межпредметность (полученные в ходе работы над заданием знания можно использовать для формирования учебной мотивации к изучению истории, географии, физики, химии, обществознания, экономики и т.д.).

3. Данные и основанные на данных математические выводы нужно обсуждать и интерпретировать, подтверждая и опровергая конкретные гипотезы. При этом мы делаем акцент на понятии статистического эксперимента, которое играет центральную роль при подтверждении или опровержении гипотез.

Вспомогательные инструменты, позволяющие автоматизировать процесс сбора и анализа данных:

1. Поисковые системы и сервисы Google, электронные таблицы
2. Библиотеки и фреймворки на языке Python для автоматизации работы с данными (Numpy, Pandas)



### **3.2 Необходимые математические знания и навыки**

1. Обыкновенные и десятичные дроби
2. Десятичная система счисления, разрядная запись числа
3. Проценты
4. Умение складывать, вычитать, умножать и делить рациональные числа
5. Вычисление части от числа и числа по его части
6. Навыки оценки и прикидки
7. Подсчёт среднего арифметического
8. Знание единиц времени и календаря
9. Единицы измерения длины, площади, объёма, массы

## **4 Практическая применимость в учебном процессе**

Учебно-методический проект вписан в контекст образовательной программы по педагогическому образованию (Семёнов и Поликарпов, 2020):

1. Расширение спектра задач, существенное усиление фактора новизны, что даже более существенно, чем включение той или иной отдельной области математики. Включение принципа новизны в концепцию ЕГЭ.
2. Применение компьютера как инструмента математической деятельности, в частности, для эксперимента, наглядности (визуализации), анализа данных (статистики) и алгебраических вычислений.

3. Физика как естественное поле для математического моделирования и анализа данных с применением цифровых технологий.
4. Алгебра – достижение всех результатов, предусмотренных ФГОС и примерными программами и многих других результатов учащимися, использующими системы компьютерной алгебры.
5. Геометрия – формирование системы целей и системы задач (а также исследовательских заданий, проектов) различной трудности. Эти системы, размещенные на цифровой платформе учения, позволяют строить индивидуальные образовательные маршруты, рассчитанные на обязательное достижение всех намеченных целей. Такой персонализированный подход к обучению, при условии соблюдения ФГОС, возможен и для других областей и предметов, но для геометрии он особенно важен. В дополнение – использование динамической геометрии для эксперимента.
6. Информатика – использование алгоритмики как источника широкого спектра новых задач и компьютера как инструмента для эксперимента – отладки – поиска ошибки у себя. Использование общей системы базовых объектов для начальной математики и математической информатики

## 5 Описание и сбор данных. Статистические эксперименты. Вероятность как частота (7-8 классы)

### 5.1 Базовые навыки критического мышления

...и вдруг я, к своему удивлению, нахожу, что вместо обычной связки, употребляемой в предложениях, а именно «есть» или «не есть», не встречаю ни одного предложения, в котором не было бы в качестве связки «должно» или «не должно». Подмена эта происходит незаметно, но тем не менее она в высшей степени важна. Раз это «должно» или «не должно» выражает некоторое новое отношение или утверждение, последнее необходимо следует принять во внимание и объяснить, и в то же время должно быть указано основание того, что кажется совсем непонятным, а именно того, каким образом это новое отношение может быть дедукцией из других, совершенно отличных от него.

---

Юм Д., *Трактат о человеческой природе, или попытка применить основанный на опыте метод рассуждения к моральным предметам*

#### Общее описание

В основе критического мышления лежит представление об объективных причинно-следственных связях между явлениями окружающего мира. В правильно построенных рассуждениях истинность одних утвержде-

ний необходимо влечёт истинность других. (Другими словами: из истины не может следовать ложь). В реальной жизни часто встречаются рассуждения а) с ложными предположениями б) с отсутствующим обоснованием логических переходов в) с ложными заключениями.

### **Общее количество часов**

4 часа

### **Цели**

1. Знать, что такое **причина, следствие, логическое следование, предположение (гипотеза, аксиома), смысловой пробел в умозаключении.**
2. Уметь выделять главную смысловую часть текста.
3. Уметь оценивать значимость информации.
4. Уметь распознавать стандартные логические ошибки.
5. Уметь выделять логическую структуру текста.
6. Уметь находить в тексте предположения, лежащие в основе выводов.

### **Содержание**

Обсуждение понятий **причина, следствие, логическое следование, предположение (гипотеза, аксиома), смысловой пробел в умозаключении.** Поиск релевантного материала для формирования и развития навыков критического мышления.

### **Почему это интересно?**

Критическое мышление позволяет изучать большинство академических дисциплин на более продвинутом уровне, структурировать информацию, успешно заниматься творческой и исследовательской деятельностью. Сформированные навыки критического мышления играют ключевую роль при освоении учебной стратегии «Поиск в интернете».

### **Цифровые технологии**

Поисковые системы (Yandex, Google).

### **Методика работы с содержанием**

Тщательно обсудить основные понятия и принципы критического мышления. Помочь учащимся в работе над проектными заданиями.

### **Формы деятельности**

Работа в диалоге с учащимися, проектная работа, командная работа, публичные дебаты.

### **Механизмы контроля и измерения**

Оценка работы в классе, самостоятельные работы или компьютерное тестирование, оценка публичной защиты проектных работ и публичных дебатов.

### **Характер взаимосвязей с другими темами из курса**

Навык критического мышления является необходимым условием для изучения большинства тем курса.

### **Межпредметные связи**

Русский язык, литература, математика, иностранный язык, история, физическая культура, музыка, технология, предметы естественнонаучного цикла (окружаю-

щий мир, биология, физика, химия).

### **Метапредметные результаты**

Умение структурировать и систематизировать информацию.

### **Примеры возможных заданий**

Заимствованы из демонстрационных вариантов **вступительных испытаний в оксфордский университет**.

1. Вегетарианская пища может быть полезнее традиционной диеты. Исследования показали, что вегетарианцы реже страдают сердечными заболеваниями и ожирением, чем мясоеды. Исследователи выразили озабоченность по поводу того, что вегетарианцы не получают достаточного количества белка в своем рационе. В то же время было показано, что, тщательно выбирая продукты, вегетарианцы могут полностью удовлетворить свои потребности и в этом отношении. Что из следующего лучше всего выражает основной вывод из приведенной выше информации?

А Вегетарианская диета может быть полезнее для здоровья, чем традиционная.

В Вегетарианская диета при определённых условиях обеспечивает достаточное количество белка.

С Традиционная диета очень богата белком.

Д Сбалансированная диета важнее для здоровья, чем выбор конкретных блюд.

Е Вегетарианцы реже страдают сердечными заболеваниями и ожирением.

2. Сторонники учёта текущей успеваемости при про-

ведении итоговой аттестации утверждают, что это намного более справедливо, чем оценка только на экзамене, поскольку это означает, что студенты, которые готовы много работать, но плохо сдают экзамены, будут иметь больше шансов на успех. Однако в текущих условиях учёт текущей успеваемости даёт гораздо больше возможностей для обмана, что ставит под сомнение справедливость такого подхода. Например, растёт рынок индивидуальных эссе, доступных (за плату) через Интернет. На данный момент единственным сдерживающим фактором является бдительность учителя, но, хотя учителя могут распознавать работы, которые кажутся нетипичными для отдельных учеников, они не всегда распознают ситуации, когда ученик получает помощь от семьи или друзей. Какой из следующих выводов лучше всего подтверждается вышеприведённым отрывком?

A Оценка по курсу не обязательно справедливее, чем оценка на экзамене.

B Наличие возможностей для академического мошенничества означает, что A-level следует оценивать только на экзаменах.

C Традиционные экзамены по-прежнему являются самым справедливым способом оценки учащихся A-level.

D Не существует полностью справедливого способа оценки учащихся на уровне A-level.

E Экзамены не оценивают, насколько усердно работал ученик.

## 5.2 Таблицы

### Общее описание

Для оптимизации и автоматизации работы с данными используются структуры данных. Простейшим видом такой структуры является таблица. Понимание основ работы с таблицами и владение основными навыками работы с таблицами составляет с одной стороны основу цифровой грамотности, с другой стороны обеспечивает фундамент для формирования математической грамотности (в первую очередь для изучения понятий множества и отображения (инъективного и сюръективного отображения)).

### Общее количество часов

2 часа

### Необходимые условия для изучения темы

Базовые навыки работы с поисковыми системами.

### Цели

1. Знакомство с понятием таблицы
2. Знакомство с методами решения повседневных задач с помощью таблиц
3. Формирование первоначальных навыков сравнения и сопоставления массивов данных
4. Формирование культуры оформления таблиц
5. Знакомство с понятием отображения

### Содержание



Задачи на составление таблиц на основе данных из разных предметных областей

### **Почему это интересно?**

Таблицы помогают структурировать информацию, чтобы убедительно представить результаты работы и принимать решения на основе сравнения множества параметров

### **Цифровые технологии**

Microsoft Word, Microsoft Excel, поисковые системы – Yandex, Google

### **Методика работы с содержанием**

Вместе с учащимся выбрать релевантные сюжеты из реальной или школьной жизни, которые представляют непосредственный интерес

### **Формы деятельности**

Проектная деятельность

### **Механизмы контроля и измерения**

Публичная защита проекта

**Характер взаимосвязей с другими темами из курса**

На основе навыков работы с таблицами в будущем будут изучаться диаграммы и распределения случайных величин, а также временные ряды, а также формироваться навыки работы с частотными таблицами.

### **Межпредметные связи**

Русский язык, литература, математика, иностранный язык, история, физическая культура, музыка, техноло-

гия, предметы естественнонаучного цикла (окружающий мир, биология, физика, химия).

### **Метапредметные результаты**

Овладение учебной стратегией "Поиск информации в Интернете".

### **Примеры возможных заданий**

#### 1. Таблица дней рождения близких людей

Составьте таблицу дней рождения Ваших друзей и родственников. Есть ли среди них те, у кого день рождения выпадает на один и тот же месяц? Сколько людей нужно взять, чтобы среди них наверняка нашлись двое, родившиеся в один и тот же месяц?

#### 2. События по годам (векам)

Сейчас 21 по счёту век нашей эры. Поставьте в соответствие каждому веку наиболее интересное и значимое с Вашей точки зрения событие. Сравните Вашу таблицу с таблицами друзей. Почему разные люди считают наиболее интересными разные события?

#### 3. Бюджет по мультфильму

Найдите 10 мультфильмов и попробуйте по описанию угадать их бюджет и сборы в прокате. Сравните результаты догадки с реальностью и представьте результаты в таблице. О чём говорят результаты проведённого исследования?

#### 4. Население по странам

Выпишите в таблицу 10 крупнейших стран мира по численности населения. Попробуйте спрогнозировать изменения численности населения в этих странах в те-

чение одного года. Какие данные могут влиять на точность такого прогноза?

### 5.3 Диаграммы

#### Общее описание

Диаграмма определяется как графическое представление данных линейными отрезками или геометрическими фигурами, позволяющее быстро оценить соотношение нескольких величин. Изучение диаграмм является необходимым условием для усвоения темы «Распределение случайной величины».

#### Общее количество часов

6 часов

#### Необходимые условия для изучения темы

Базовые навыки работы с поисковыми системами, базовые навыки аналитического и критического мышления.

#### Цели

1. Знакомство с понятиями столбчатой и круговой диаграммы.
2. Формирование умения строить диаграммы по наборам данных, в том числе с помощью цифровых инструментов.
3. Формирование умения использовать диаграммы на практике для наглядного представления данных и сравнения величин.

#### Содержание

Обсуждение возможных проектов опросов и публичная защита проектов, вместе с обсуждением результатов.

## **Почему это интересно?**

Раздел позволяет научиться наглядно представлять результаты исследований и опросов, что представляет практическую ценность как для профессиональной, так и для повседневной деятельности.

### **Цифровые технологии**

Поисковые системы (Yandex, Google), Google-документы, Microsoft Excel, любые инструменты для построения диаграмм и визуализации данных

### **Методика работы с содержанием**

Обсуждение понятия диаграммы и выбора темы для проекта.

### **Формы деятельности**

Творческая и командная работа – обсуждение возможных применений столбчатых и круговых диаграмм.

### **Механизмы контроля и измерения**

Наблюдение за проектной и командной работой учащихся с последующим обсуждением и публичной защитой результатов проекта.

### **Характер взаимосвязей с другими темами из курса**

Понятие диаграммы служит основой для понятия "Распределение случайной величины изучаемого в дальнейшем.

### **Межпредметные связи**

Русский язык, литература, математика, иностранный язык, история, физическая культура, музыка, техноло-

гия, предметы естественнонаучного цикла (окружающий мир, биология, физика, химия).

### **Метапредметные результаты**

Развитие навыка моделирования и проектирования научного эксперимента.

### **Примеры возможных проектных заданий**

1. Голосование – выбор проекта праздника для выпускного / Нового года / поездки на каникулы  
2. Рост – сбор данных о росте учащихся в зависимости от возраста / года рождения  
3. Статистика по кружкам – кто посещает какие кружки и как часто  
4. Статистика по посещениям музеев, городов и стран – насколько распространены достопримечательности и туристические маршруты

Вместе с проектом социологического опроса необходимо предоставить описание выборки, ограничений исследования, предположений о репрезентативности выборки и предлагаемых выводов исследования.

## **5.4 Случайные события**

### **Общее описание**

Раздел содержит различные интерпретации понятия "вероятность" и обсуждение их практической применимости.

### **Общее количество часов**

4 часа

### **Необходимые условия для изучения темы**

Базовые навыки логического, аналитического и критического мышления.

## **Цели**

1. Знать, что понятие вероятности имеет несколько различных интерпретаций.
2. Формировать практические навыки решения задач, которые впоследствии можно будет применить в анализе данных.

## **Содержание**

Выявление факторов, влияющих на вероятность различных событий. Задачи, позволяющие определить границы применимости теории вероятности.

### **Почему это интересно?**

Раздел позволяет познакомиться с новыми и неожиданными задачами, имеющими по несколько принципиально разных интерпретаций.

### **Цифровые технологии**

Поисковые системы (Yandex, Google)

### **Методика работы с содержанием**

Как можно тщательнее обсудить с учащимися полисемантичесность понятия "вероятность".

### **Формы деятельности**

Творческая и командная работа – обсуждение возможных интерпретаций понятия "вероятность".

### **Механизмы контроля и измерения**

Наблюдение за публичными дебатами, командной работой и публичной защитой проектов.

## **Характер взаимосвязей с другими темами из курса**

Понятие вероятности является центральным для всего курса, оно является основой для понятия «распределение случайной величины».

### **Межпредметные связи**

Русский язык, литература, математика, иностранный язык, история, физическая культура, музыка, технология, предметы естественнонаучного цикла (окружающий мир, биология, физика, химия).

### **Метапредметные результаты**

Развитие стохастического мышления и формирование привычки к работе с полисемантическими понятиями.

### **Примеры возможных заданий**

Вводное задание (обязательное для всех): Проведите опрос в любом из доступных Вам мессенджеров или социальных сетей. Как Вы думаете, сколько человек просмотрят Ваш пост и сколько из них проголосуют? Как будут распределены голоса за каждый из вариантов? Сравните ожидания с реальностью. Найдите долю проголосовавших от числа просмотров. Сравните Ваше распределение ответов с распределениями друзей.

Какие факторы сильнее всего влияют на количество просмотров и количество ответов? Как можно повлиять на количество ответов и статистику голосов?

Задачи для тренировки: Вероятность события обычно записывается числом от 0 до 1. (0 – невозможное событие, 1 – достоверное событие)

Попробуйте расположить (в тех случаях, где сможе-



те корректно определить вероятность) на вероятностной шкале (на отрезке от 0 до 1) следующие события:

А. Столкновение двух автомобилей а) на Садовом кольце б) на МКАД в) на парковке перед крупным торговым центром

В. Крушение крыши загородного дома под толщей снега

С. Падение самолёта

Д. Крупный выигрыш в лотерее

Е. Счёт а) 5:0 б) 1:1 в) 0:5 в футбольном матче «Спартак» – «ЦСКА».

Ф. Поступление на механико-математический факультет МГУ

Г. Гроза в Москве

Н. Падение температуры в Москве ниже 40 градусов по Цельсию в январе

І. Ожидание автобуса на автобусной остановке в Москве составит меньше 5 минут

В каких случаях оценка вероятности представляет наибольшую трудность? В каких случаях оценка вероятности в принципе не представляется возможной?

Попробуйте выявить факторы, влияющие на вероятность случайных событий (в тех случаях, где это возможно, попробуйте обосновать свои рассуждения).

Какие факторы могут значительно затруднять или упрощать оценку вероятности конкретного события?

Проектная работа: подготовить сообщение об истории понятия "вероятность" и различных интерпретациях этого понятия в профессиональной деятельности.

## 5.5 Статистический эксперимент

### Общее описание

В разделе вводится понятие статистического эксперимента, позволяющее интерпретировать вероятность как асимптотическую частоту.

#### Общее количество часов

4 часа

#### Необходимые условия для изучения темы

Навыки аналитического, логического и критического мышления.

#### Цели

1. Знать, что такое статистический эксперимент.
2. Уметь проектировать статистические эксперименты и выявлять ограничения статистического подхода к анализу проблем.

#### Содержание

Проектирование статистических экспериментов.

#### Почему это интересно?

Раздел позволяет познакомиться с ключевым для большого количества практических приложений понятием. Использование этого понятия на практике позволяет эффективно решать повседневные и профессиональные задачи.

#### Цифровые технологии

Поисковые системы (Yandex, Google)

## **Методика работы с содержанием**

Работа в диалоге с учащимися.

### **Формы деятельности**

Творческая и командная работа – обсуждение возможных статистических экспериментов.

### **Механизмы контроля и измерения**

Наблюдение за публичными дебатами, командной работой и публичной защитой проектов.

**Характер взаимосвязей с другими темами из курса**

Понятие служит основой для модуля по статистике.

### **Межпредметные связи**

Русский язык, литература, математика, иностранный язык, история, физическая культура, музыка, технология, предметы естественнонаучного цикла (окружающий мир, биология, физика, химия).

### **Метапредметные результаты**

Развитие навыка моделирования и проектирования научного эксперимента.

### **Примеры возможных заданий**

Статистический эксперимент - это эксперимент, в котором

(а) множество возможных результатов эксперимента конечно\* (и содержит более 1 элемента) и их все можно выписать заранее (определённость)

(б) любое выполнение эксперимента гарантированно приводит к одному из результатов из списка, но к какому

конкретно предсказать нельзя (непредсказуемость)  
(в) эксперимент является воспроизводимым (его можно повторить неограниченное количество раз примерно в одних и тех же условиях) (воспроизводимость)

\*или **измеримо**

Попробуйте придумать эксперименты, для которых  
а) не выполнено ни одно из условий (а)-(в) б) выполнено ровно одно из условий (для каждого из условий приведите свой пример) в) не выполнено ровно одно из условий (для каждого из условий приведите свой пример) г) выполнены все условия.

В тех случаях, когда придумать эксперимент возможно, приведите пример. В тех случаях, когда эксперимента не существует, приведите доказательство.

Постройте вероятностную шкалу для придуманного Вами эксперимента из пункта г).

### **Задания, связанные с компьютерным моделированием**

Смоделируйте описанные ниже эксперименты на компьютере. Организуйте сбор необходимых статистических данных и их обработку. Ответьте на вопросы и сделайте выводы.

1. Известно, что частота любого события с ростом числа экспериментов приближается к его вероятности. Как быстро это происходит? Проведите компьютерный эксперимент с монетой, кубиком, «кнопкой» и оцените необходимое число опытов  $N$ , чтобы оценить вероятность с точностью до 0,1; 0,01; 0,001. Зависит ли это число от величины оцениваемой вероятности?

### **Виртуальная лаборатория**

2. Попросите каждого из своих друзей выписать слу-

чайную последовательность из 0 и 1. После этого смоделируйте несколько таких последовательностей на компьютере. Какие из них кажутся вам «более» случайными? Есть ли какие-то способы отличить компьютерные последовательности от написанных вручную?

### Генератор случайных последовательностей

3. Есть такой способ определения численности популяции в биологии: отлавливают  $n_1$  особей, помечают их и отпускают на волю. Через какое-то время снова отлавливают - теперь уже  $n_2$  особей и определяют, сколько среди них помеченных: пусть их будет, например,  $m$ . Как по числам  $n_1, n_2, m$  оценить общую численность популяции? Проведите компьютерный эксперимент и оцените ошибку такой оценки.

### Численность популяции

4. В настольной игре участвуют 4 игрока, которые по очереди бросают кубик и передвигают свою фишку вперёд на число полей, выпавшее на кубике. Всего нужно пройти 100 полей. Игра заканчивается, как только один из игроков достигнет финиша. Сколько примерно будет продолжаться такая игра? Насколько сильно отличаются вероятности выигрышей для 1-го, 2-го, 3-го и 4-го игроков?
5. Вы собираетесь организовать школьную благотворительную лотерею и хотите сделать её как можно более интересной. Придумайте правила лотереи, определите призовой фонд и стоимость одного билета. Смоделируйте лотерею на компьютере и оцените ожидаемую прибыль.
6. Чтобы получить положительную оценку за тест нуж-

но ответить правильно на  $m$  из  $n$  вопросов. Для каждого вопроса нужно выбрать (единственный) правильный ответ из предложенных. Оцените вероятность прохождения такого теста неподготовленным учеником. Каково должно быть примерное соотношение  $m$  и  $n$ , чтобы эта вероятность была меньше 0,1? 0,01? 0,001?

7. Смоделируйте таблицу со случайными днями рождения.
8. Смоделируйте таблицу результатов игр предстоящего футбольного чемпионата. Используйте для этого статистические данные прошлых сезонов.

## **6 Теоретические основы статистики. Основные понятия теории вероятностей (8-9 классы)**

### **6.1 Комбинаторные сюжеты**

#### **Общее описание**

Одним из основных понятий, которые мы будем изучать в ходе данного курса, является понятие вероятности. Традиционный подход к понятию вероятности основан на понятиях "пространства элементарных исходов" и "количества благоприятных исходов". Для того, чтобы подсчитывать количество элементов в "пространстве элементарных исходов" мы пользуемся методами комбинаторики. Кроме того, понятия комбинаторики играют важную роль при формировании навыков математического моделирования и формировании привычки к существованию различных интерпретаций тех или иных моделей (полисемантичности естественного языка).

## **Общее количество часов**

8 часов

## **Необходимые условия для изучения темы**

Умение работать с различными интерпретациями понятий, развитое логическое и аналитическое мышление, для некоторых заданий – базовые навыки программирования или навыки поиска готовых компьютерных программ в интернете.

### **Цели**

1. Знать, что результаты экспериментов или ситуации из реальной жизни можно кодировать с помощью цифр и букв (знакомство с символьными моделями)
2. Формировать практические навыки решения задач, которые впоследствии можно будет применить в оценке вероятностей и в теории алгоритмов.

### **Содержание**

Задачи на подсчёт количества перестановок, размещений и сочетаний, в том числе с повторениями.

### **Почему это интересно?**

Комбинаторное мышление позволяет оценивать сложность алгоритмов перебора, играющих большую роль в решении профессиональных и повседневных задач.

### **Цифровые технологии**

Numpy (Библиотека для Python), поисковые системы (Yandex, Google)

## **Методика работы с содержанием**

Как можно тщательнее обсудить с учащимися полисемантичность понятия "количество способов".

### **Формы деятельности**

Выписывание знаковых моделей для изучаемых ситуаций, творческая и командная работа – обсуждение возможных интерпретаций понятия "количество способов". Использование языка программирования Python для перечисления возможных комбинаций.

### **Механизмы контроля и измерения**

Проверка письменных (или сданных в цифровой форме) работ учащихся.

**Характер взаимосвязей с другими темами из курса**

Навыки работы с понятиями комбинаторики необходимы для оценки временной сложности алгоритмов и работы с понятием вероятности.

### **Межпредметные связи**

Информатика, технология, лингвистика

### **Метапредметные результаты**

Развитие комбинаторного мышления

### **Примеры возможных заданий**

Вводное задание (обязательное для всех): Пусть дан набор из разноцветных карточек: 1 синяя, 2 жёлтых и 3 белых. Сколькими способами можно выбрать пару карточек из этого набора?

Задача имеет 10 различных ответов:



2,3,4,5,6,8,11,15,22,26

Сможете ли Вы найти все интерпретации понятия "количество способов"? (сюжет заимствован из книги Глеман М., Варга Т. Вероятность в играх и развлечениях.)

Задачи для тренировки\*: \* В тех случаях, где это возможно, учащимся предлагается написать (или найти в интернете) компьютерную программу, **явно** перечисляющую соответствующие комбинации. 1. Серия пенальти состоит из 5 ударов. Сколькими способами она может завершиться?

2. В баскетбольную корзину бросают мяч. Сколькими способами может завершиться серия из 10 бросков?

3. Сколькими способами можно разложить 10 яблок по 3 корзинам?

4. Сколько существует кодов а) из 4 цифр б) из 8 цифр?

5. Сколькими способами можно расставить на полке 11 книг?

## 6.2 Оценка вероятностей в простейших случаях

### Общее описание

В этом разделе мы рассматриваем простейшие теоретические модели статистических экспериментов. В тех случаях, где это возможно, учащимся предлагается смоделировать соответствующие эксперименты с помощью динамических сред или генераторов случайных чисел, встроенных в **системы компьютерной алгебры** или **среды для программирования**.

#### Общее количество часов

От 6 до 18 часов в зависимости от "глубины погружения" и тщательности проработки теоретического материала.

#### Необходимые условия для изучения темы

Уверенное владение базовыми понятиями комбинаторики. В отдельных случаях – базовые навыки программирования.

#### Цели

1. Знать, что такое равновозможные события, элементарные события и пространство элементарных исходов.
2. Знать, что такое вероятность (по Паскалю и Лапласу).
3. Уметь оценивать вероятности случайных событий в простейших теоретических моделях статистических экспериментов.
4. Сформировать начальное представление о законе больших чисел и центральной предельной теореме.

## **Содержание**

Решение типовых задач по теории вероятностей. Предлагается рассмотреть 3 основных сюжета: бросание монеты, бросание кубика, урновую схему (с возвращением, без возвращения и с одновременным выбором).

### **Почему это интересно?**

Теоретическое и компьютерное моделирование стандартных статистических экспериментов позволяет расширить и углубить с одной стороны представление о статистическом эксперименте, с другой стороны лучше познакомиться с теоретическим аппаратом теории вероятностей.

### **Цифровые технологии**

Поисковые системы (Yandex, Google), компиляторы, динамические среды.

### **Методика работы с содержанием**

Совместное решение задач, компьютерное моделирование статистических экспериментов.

### **Формы деятельности**

Творческая и командная работа – обсуждение определений, гипотез и теоретических моделей.

### **Механизмы контроля и измерения**

Оценка работы в классе, самостоятельные работы по типовым задачам или компьютерное тестирование.

### **Характер взаимосвязей с другими темами из курса**

Понятие пространства элементарных исходов служит

основой для изучения теоретической теории вероятностей. Изучаемые в рамках этой темы понятия являются необходимым условием для изучения закона больших чисел и центральной предельной теоремы.

### **Межпредметные связи**

Информатика, технология

### **Метапредметные результаты**

Формирование понятийного мышления и навыка проектировать статистические эксперименты.

### **Примеры возможных заданий**

1. Эксперимент состоит в бросании 1 игрального кубика. Все исходы считаются равновероятными. Результат называется «выигрышем», если число на кубике равно 5 или 6. Каково приблизительное отношение «выигрышей» к количеству экспериментов, если количество экспериментов достаточно велико?
2. Карты с номерами от 0 до 9 кладутся в черный ящик. Игрок достает одну карту из коробки, смотрит на номер на карте и кладет ее обратно в коробку. После этого карты перемешиваются и процедура повторяется. Оцените вероятность того, что
  - а) число на карте четное
  - б) число на карте делится на 3
  - в) число на карте делится как на 2, так и на 3
  - г) число на карте не делится ни на 2, ни на 3
3. Эксперимент состоит в бросании 2 игральных кубиков. Результат называется «выигрышем», если числа на кубиках совпадают. Каково примерное соот-

ношение «выигрышей» к количеству экспериментов, если количество экспериментов достаточно велико?

4. Эксперимент состоит в бросании 2 игральных кубиков и вычислении суммы выпавших чисел. Найдите все возможные суммы. Для каждой из них оцените вероятность её выпадения.
5. Число от 1 до 20 выбирается случайным образом. Оцените вероятность того, что
  - а) число четное
  - б) число делится на 3
  - в) число делится как на 2, так и на 3
  - г) число не делится ни на 2, ни на 3
  - д) число имеет сумму цифр, равную 9
  - е) число имеет сумму цифр, кратную 3
6. Эксперимент заключается в одновременном бросании 4 кубиков. Оцените вероятность того, что
  - а) на всех 4 кубиках выпадает цифра 6
  - б) цифра 6 встретится 3 раза и 5 один раз
  - в) число 6 встретится два раза, а 5 - два раза
  - г) число 6 встретится ровно один раз
  - д) все числа разные
  - е) ни одно из чисел не равно 6
  - г) 6 появится хотя бы 1 раз
7. Алиса, Даша, Глеб и Сергей выстраиваются в случайном порядке. Оцените вероятность того, что
  - а) Алиса первая в очереди
  - б) Даша не последняя в строю
  - в) Даша стоит перед Алисой
  - г) Даша стоит рядом (спереди или сзади) с Алисой
  - д) Алиса стоит перед Дашей и перед Глебом
  - е) Даша стоит перед Алисой, а Глеб перед Сергеем.

8. Буквы в слове АЛИСА перемешаны и расставлены в произвольном порядке. Какова вероятность появления того же слова? Ответьте на тот же вопрос для своего имени и имен своих соседей.
9. Эксперимент состоит в последовательном бросании 4 кубиков. Оцените вероятность того, что числа на кубиках будут идти в порядке убывания.

#### Четыре кубика

10. Карточки с цифрами от 0 до 9 и буквами от А до F кладутся в черный ящик. Игрок достает одну карточку из коробки, смотрит на карточку и убирает её. Это повторяется до тех пор, пока коробка не опустеет. Оцените вероятность того, что буквы будут появляться в алфавитном порядке, а числа в порядке возрастания.
11. Восемь команд принимают участие в футбольном турнире. Турнир состоит из 3 туров. Во время каждого тура команды играют друг с другом, ничьих нет, проигравшая команда выбывает. Турнирная таблица заполняется случайным образом. Представьте себе, что у каждой команды есть определенная «сила», силы всех команд различны, и более сильная команда всегда побеждает более слабую.
- а) Какова вероятность того, что самая сильная команда выигрывает турнир?
- б) Какова вероятность того, что вторая по силе команда займет второе место?
- в) Какова вероятность того, что третья по силе команда займет третье место? \*
- г) Какова вероятность того, что четвертая по силе команда займет четвертое место? \*
- Команды, проигравшие в полуфинале, соревнуются за третье место.

12. Даша идет на день рождения. За круглым столом в произвольном порядке сидят десять девочек (включая Дашу) и десять мальчиков.
- а) Какова вероятность, что сосед справа от Даши мальчик?
  - б) Какова вероятность того, что оба соседа - мальчики?

13. Автомобильный номер состоит из 3-х цифр. Какова вероятность того, что случайный номер
- а) состоит только из единиц
  - б) состоит только из единиц и двоек
  - в) начинается с 5
  - г) оканчивается на 9
  - д) начинается с 5 и заканчивается на 9
  - е) состоит из 3-х цифр, одинаковых
  - г) не содержит ни одной единицы
  - з) содержит хотя бы одну цифру 4
  - и) имеет сумму цифр, равную 25
  - й) первая цифра больше последней
  - к) содержит ровно две девятки
  - л) не содержит цифр меньше 4
  - м) состоит только из неубывающих цифр

14. **Примеры задач из урока на платформе 1С**

15. Эксперимент заключается в одновременном бросании 4 кубиков. Оцените вероятность того, что: а) на всех кубиках выпадет цифра 6; б) выпадет три цифры 6 и одна - 5; в) выпадет две цифры 6 и две - 5; г) цифра 6 выпадет ровно 1 раз; д) все числа разные; е) ни одно из чисел не равно 6; ж) 6 появится хотя бы один раз.

**4 кубика**

16. Эксперимент состоит в последовательном бросании 4-х кубиков. Оцените вероятность того, что числа на кубиках идут в порядке убывания.
17. В плей-офф участвует 8 команд, разных по силе. Та, что сильнее, всегда выигрывает. Команды, проигравшие в полуфинале, играют за третье место. Какова вероятность, что самая сильная команда выиграет? Какова вероятность, что вторая по силе будет второй? Какова вероятность, что третья по силе будет третьей? Какова вероятность, что четвертая по силе будет четвертой? Продолжение: Какова вероятность, что третья по силе будет второй? Какова вероятность, что четвертая по силе будет второй? Какова вероятность, что  $i$ -я по силе будет  $j$ -й?

#### Турнир из 8 команд

18. Автомобильный номер состоит из 3-х цифр. Какова вероятность, что случайный номер а) состоит только из 1; б) состоит только из 1 и 2; в) начинается с 5; г) состоит из одинаковых цифр; д) не содержит ни одной 1; е) имеет сумму, равную 25; ж) первая цифра больше последней; з) не содержит цифр, меньше 4; и) все цифры не убывают.

#### Автомобильный номер

19. Телефонный номер состоит из 7-ми цифр. Вопросы те же. НО: прежде, чем вычислять вероятности в этой и предыдущей задачах, попробуйте их сравнить, т.е. поставить знаки  $>$ ,  $<$ ,  $=$  между соответствующими вероятностями. Потом вычислите точные значения и проверьте свою вероятностную интуицию.



### **6.3 Операции над множествами, формула суммы вероятностей и формула включений и исключений**

#### **Общее описание**

В этом разделе мы изучаем понятие несовместных событий и учимся работать с пространством элементарных исходов посредством логических операций над множествами.

#### **Общее количество часов**

8 часов

#### **Необходимые условия для изучения темы**

Знакомство с понятием пространства элементарных исходов, диаграммами Эйлера-Венна и простейшими логическими операциями над множествами.

#### **Цели**

1. Знакомство с понятиями несовместных и противоположных событий.
2. Формирование умения приводить примеры несовместных и противоположных событий и изображать их с помощью диаграмм Эйлера-Венна.
3. Формирование умения формулировать отрицания к утверждениям и использовать это умение для оценки вероятностей в простейших случаях.
4. Знакомство с формулой включений и исключений и формирование навыков решения задач с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

#### **Содержание**

На первом этапе приводится базовый пример несовместных событий (доставание наугад из мешка кубиков разных цветов). Учащимся предлагается привести собственные примеры несовместных событий и изобразить их с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Формулируется общее понятие несовместных событий как событий, которые не могут произойти одновременно. Приводится принцип сложения вероятностей: если два события несовместны, то вероятность того, что произойдёт хотя бы одно из них, равна сумме вероятностей. Вводится понятие противоположных событий и практический приём вычисления вероятности события через вычитание из 1 вероятности противоположного к нему события. Рассматриваются различные примеры, позволяющие научиться строить логические отрицания к данным утверждениям. На конкретных примерах вводится формула включений и исключений.

### **Почему это интересно?**

Понятие несовместных событий и формула суммы вероятностей являются важнейшими инструментами для изучения условной вероятности и формулы Байеса, имеющей значительное количество практических приложений.

### **Цифровые технологии**

Инструменты для визуализации диаграмм Эйлера-Венна.

### **Методика работы с содержанием**

На первых этапах изучения темы целесообразна работа с инструментами визуализации диаграмм Эйлера-Венна, в дальнейшем стоит сделать акцент на самостоятельном решении и придумывании задач на форму-

лирование логических отрицаний и работу с формулой включений и исключений.

Возможна подача материала в игровой форме:

Один из игроков формулирует утверждение, а другой должен сформулировать его отрицание (противоположное утверждение).

### **Формы деятельности**

Фронтальная работа с учащимися, конспектирование материала и самостоятельное решение задач. В отдельных случаях целесообразно предложить учащимся придумать самостоятельно задачи для более глубокого усвоения материала.

### **Механизмы контроля и измерения**

Компьютерное тестирование и проектная работа по самостоятельному придумыванию задач.

### **Характер взаимосвязей с другими темами из курса**

Твёрдое усвоение понятий несовместных и противоположных событий является необходимым условием для изучения темы "Условная вероятность".

### **Межпредметные связи**

Русский язык, литература, математика, иностранный язык, история, физическая культура, музыка, технология, предметы естественнонаучного цикла (окружающий мир, биология, физика, химия).

### **Метапредметные результаты**

Формирование навыка формулирования отрицаний к утверждениям, играющего решающую роль в формировании навыков критического мышления.

## Примеры возможных заданий

Задания заимствованы из книги А.Х. Шеня (Шень А. Вероятность: примеры и задачи).

1. В мешке с кубиками есть белые, жёлтые и чёрные кубики. При этом белых 10% (от общего числа кубиков), а жёлтых 15%. Какова доля кубиков светлых тонов (белых или жёлтых)? доля чёрных кубиков?

2. Наудачу выбирается число  $n$  от 1 до 100. Рассмотрим такие события: (а) число  $n$  чётно;

(б) число  $n$  нечётно;

(в) число  $n$  делится на 4;

(г) число  $n$  даёт остаток 2 при делении на 4;

(д) число  $n$  даёт остаток 1 при делении на 4.

Какие из этих событий несовместны? (Укажите все пары несовместных событий)

3. Эксперимент состоит в одновременном бросании 4 кубиков. Вычислите вероятность того, что при бросании четырёх кубиков выпадет хотя бы одна шестёрка.

### Четыре кубика

4. Задумано некоторое число  $x$ . Оказалось, что среди пяти утверждений  $x > 10$ ,  $x > 20$ ,  $x > 30$ ,  $x > 40$  и  $x > 50$  есть три верных и два неверных. Какие из утверждений верны?

5. Учитель сказал об оценках за контрольную: Сергеев получил не 5, Васильев получил не 4, Алексеев получил 4. При этом учитель ошибся два раза. Какую оценку получил каждый из учеников, если известно, что один из них получил 3, другой 4, а третий 5?

6. Напишите формулу для вероятности суммы трёх событий  $A+B+C$  (произошло хотя бы одно из трёх), если известны вероятности каждого из событий  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , вероятности их попарных произведений  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , а также вероятность их тройного произведения

$P(ABC)$  (произошли все три события).

7. Бросают четыре игральные кости (красную, жёлтую, зелёную и синюю). Пусть  $A$  – событие «на красной кости выпала шестёрка», а  $B$  – событие «на синей кости выпало чётное число очков». Найдите вероятность событий  $A$ ,  $B$ ,  $A + B$  и  $AB$ .

Четыре кубика

## 6.4 Условная вероятность и формула Байеса

### Общее описание

Раздел посвящён понятию зависимых событий, условной вероятности и формуле Байеса.

#### Общее количество часов

16 часов

#### Необходимые условия для изучения темы

Уверенное владение понятиями несовместных и противоположных событий.

#### Цели

1. Знакомство с понятием зависимых событий.
2. Формирование умения пользоваться понятием условной вероятности и формулой Байеса для решения задач с практическим содержанием.
3. Формирование умения пользоваться формулой Байеса для оценки вероятностей и проектирования простейших алгоритмов машинного обучения.

#### Содержание

На базовом примере (см. задание 1 в конце раздела) приводится пример подсчёта условной вероятности, после чего вводится общее понятие условной вероятности.

**Условной вероятности события А при условии события В** называется отношение  $\frac{\Pr(AB)}{\Pr(B)}$ .

Из определения условной вероятности выводится принцип: Чтобы найти вероятность того, что произойдут оба события А и В, надо умножить вероятность события В на условную вероятность события А при известном В.

На различных примерах и задачах для самостоятельного решения рассматриваются условные вероятности, после чего формулируется формула Байеса:

$$\Pr(A|B) = \Pr(A) \frac{\Pr(B|A)}{\Pr(B)}$$

Учащимся предлагается решить несколько базовых задач на формулу Байеса и придумать свои задачи.

Вводится понятие независимых событий:

говорят, что **событие А не зависит от события В**, если  $\Pr(A|B) = \Pr(A)$ . Учащимся предлагается придумать несколько примеров зависимых и независимых событий.

Из определения независимых событий выводится правило произведения: вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

После этого учащимся предлагается на выбор либо самостоятельное решение задач на независимые события, либо проектная работа, связанная с практическими приложениями формулы Байеса и понятия независимых событий.

**Почему это интересно?**

Понятие несовместных событий и формула суммы

вероятностей являются важнейшими инструментами для изучения условной вероятности и формулы Байеса, имеющей значительное количество практических приложений.

С помощью 5 базовых примеров объясняется практическая применимость понятия независимых событий:

Пример 1. Пусть при испытаниях нового лекарства его получили 10% больных определённой болезнью. При этом оказалось, что из получивших лекарство выздоровела половина (50% от принимавших, или 5% от всех больных), в то время как из всех больных выздоровели 60%.

Пример 2. В школу приехала комиссия для проверки результатов зачёта по математике и провела повторный зачёт своими силами. Известно, что первоначальный зачёт сдали 70% школьников, а зачёт комиссии сдали 50% школьников. Сколько процентов школьников сдали оба зачёта, если комиссия была действительно независимой и не учитывала результатов предыдущего зачёта?

Пример 3. Метеостанция вела наблюдения в течение года и зафиксировала, в какие дни в данном населённом пункте был гром и в какие молния. Скорее всего события «был гром» и «была молния» (для случайно выбранного дня в году) будут зависимы. Однако на основании этих данных нельзя судить о том, является ли молния причиной грома (как учит физика) или наоборот: если событие А зависит от В, то и событие В зависит от А, и эта зависимость не позволяет судить о том, что здесь причина, а что следствие.

Пример 4. Мы бросаем монету десять раз подряд. При этом первые девять раз выпал орёл. Увеличивает ли это вероятность выпадения орла в десятый раз?

Пример 5. Ихтиологи выловили из пруда 40 рыб и

пометили их. На следующий день они снова выловили 50 рыб, из которых оказалось 18 помеченных. Оценить число рыб в пруду.

### **Цифровые технологии**

Электронные таблицы, среды для моделирования статистических экспериментов.

### **Методика работы с содержанием**

Фронтальное обсуждение основных теоретических понятий и формул, переход от теоретических понятий к их практическим приложениям.

Качество усвоения темы зависит в первую очередь от формирования у учащихся навыка находить практические применения изучаемых понятий.

### **Формы деятельности**

Фронтальная работа, самостоятельное решение задач, в отдельных случаях – проектная работа.

### **Механизмы контроля и измерения**

Компьютерное тестирование и проектная работа по самостоятельному придумыванию задач, публичная защита проектов.

### **Характер взаимосвязей с другими темами из курса**

Владение формулой Байеса позволяет разрабатывать простейшие алгоритмы машинного обучения.

### **Межпредметные связи**

Русский язык, литература, математика, иностранный язык, история, физическая культура, музыка, технология, предметы естественнонаучного цикла (окружаю-



щий мир, биология, физика, химия).

### **Метапредметные результаты**

Формирование навыка формулирования отрицаний к утверждениям, играющего решающую роль в формировании навыков критического мышления.

### **Примеры возможных заданий**

Задания заимствованы из книги А.Х. Шеня (Шень А. Вероятность: примеры и задачи).

1. Среди учеников школы 15% знают французский язык и 20% знают немецкий язык. Доля учеников, знающих оба этих языка, составляет 5%. Какова доля учеников, знающих французский язык, среди учеников, знающих немецкий язык? Какова (в той же ситуации) доля учеников, знающих немецкий язык, среди учеников, знающих французский язык? Какова (в той же ситуации) доля учеников, знающих французский язык, среди учеников, не знающих немецкого?
2. Двое игроков играют матч из 20 партий; выигрывает тот, кто первым наберёт 10 очков (за победу даётся одно очко, за проигрыш ноль, ничьих не бывает). Считая все варианты (любые комбинации из двадцати выигрышей и проигрышей) равновероятными, найдите вероятность того, что первый игрок выигрывает матч, если после 17 игр счёт был 9 : 8 в его пользу. Тот же вопрос, если после 15 игр счёт был 8 : 7 в его пользу.
3. Король предлагает узнику разложить десять белых и десять чёрных шаров по двум одинаковым коробкам (надо использовать все шары; в каждой коробке должен быть хотя бы один шар). После этого

король выбирает случайный шар из случайной коробки; если шар чёрный, то узника казнят, если белый, то отпускают. Как нужно разложить шары, чтобы вероятность выжить была максимальной?

4. Среди шахматистов каждый седьмой музыкант, а среди музыкантов каждый девятый шахматист. Кого больше шахматистов или музыкантов? Во сколько раз?
5. Бросают два кубика: красный и синий. Будут ли события «на красном кубике выпала чётная цифра» и «на синем кубике выпала пятёрка или шестёрка» независимы?
6. Найдите (отдельно для двух вариантов: шары возвращаются или нет) вероятность вытащить чёрный шар три раза подряд; четыре раза подряд; пять раз подряд. В каком случае (с возвращениями или без) вероятность больше и почему?
7. Проверьте, что при бросании кубика события «выпало чётное число» и «выпало число, делящееся на 3» независимы.
8. \* Приведите пример двух событий, которые а) независимы с точки зрения «здравого смысла», но зависимы с точки зрения теории вероятностей б) независимы с точки зрения теории вероятностей, но зависимы с точки зрения «здравого смысла»
9. Двое игроков играют в матч из 20 партий; выигрывает тот, кто первым наберёт 10 очков (ничьих не бывает). Считая силы игроков равными, найдите вероятность того, что первый игрок выиграет матч, если после 17 игр счёт был 9:8 в его пользу; после 15 игр счёт был 8:7 в его пользу. До вычис-

ления, попробуйте оценить, какая из вероятностей больше (опять вероятностная интуиция).

10. Король предлагает узнику разложить 5 белых и 5 чёрных шаров по двум коробкам (надо использовать все шары, коробки не должны быть пустыми). После этого король выбирает случайный шар из случайной коробки: чёрный – казнить, белый – помиловать. Как нужно разложить шары, чтобы вероятность выжить была максимальной?

**Казнить или помиловать**

11. Король издал указ: в целях дальнейшего укрепления развитого социализма и предотвращения распыления наследства семьям, уже имеющим мальчика, запретить заводить новых детей. Как повлияет этот указ на долю мужчин в королевстве?

**Указ короля**

12. В коробке лежит  $N$  шаров, среди которых  $M$  чёрных. Найдите (отдельно для двух вариантов: шары возвращаются или нет) вероятность вытащить чёрный шар три раза подряд; четыре раза подряд; пять раз подряд. В каком случае (с возвращением или без) вероятность больше и почему?

## 6.5 Парадоксы теории вероятностей

### Общее описание

Раздел посвящён изучению наиболее известных парадоксов теории вероятностей, выявляющих противоречия между «здравым смыслом» и математическими моделями реальности.

### Общее количество часов

4 часа

## **Необходимые условия для изучения темы**

Навыки критического мышления, знакомство с основными понятиями теории вероятностей и базовая математическая грамотность.

### **Цели**

1. Знакомство с геометрическим подходом к определению вероятности. Изучение парадокса Бертрана как базового примера, связанного с ограничениями геометрического подхода.
2. Формирование критического мышления и исследовательских навыков.

### **Содержание**

На примере парадокса Бертрана рассматривается геометрический подход к определению вероятности. В рамках фронтального обсуждения рассматриваются различные подходы к вычислению вероятности в случаях, когда рассматривается эксперимент с бесконечным пространством элементарных исходов.

Предлагается детально рассмотреть три известных подхода к изучаемой проблеме (текст заимствован из статьи Shackel N. Bertrand's Paradox and the Principle of Indifference //Philosophy of Science. – 2007. – Т. 74. – №. 2. – С. 150-175.):

(1) Хорды с концами в вершине треугольника длиннее стороны, если они лежат внутри угла при вершине. Поскольку это верно для одной трети хорд, вероятность равна одной трети.

(2) Хорды, параллельные одной стороне такого тре-

угольника, длиннее, если они пересекают внутреннюю половину радиуса, перпендикулярного им. В этом случае вероятность составляет половину.

(3) Хорда длиннее стороны, если ее середина попадает в круг, вписанный в треугольник. Радиус вписанной окружности равен  $\frac{1}{2}$ , следовательно, площадь вписанного круга равна четверти площади описанного. Таким образом, вероятность равна  $\frac{1}{4}$ .

Далее учащимся предлагается найти объяснение парадокса Бертрана и обсудить различия между рассмотренными решениями. Общим выводом, который предлагается сделать по итогам обсуждения, является то, что ответ на вопрос, связанный с вероятностью, определён однозначно только в тех случаях, когда определён метод проведения статистического эксперимента.

В качестве проектных и творческих заданий предлагается рассмотреть одну из наиболее известных классических задач теории вероятностей, допускающую множественные интерпретации: задачу Монти Холла, задачу о двух конвертах, Санкт-Петербургский парадокс или задачу о 100 узниках и 100 ящиках. В отдельных случаях допускается выбирать в качестве проектного задания другие задачи по выбору учащихся.

По итогам командной работы учащиеся выступают с презентациями, описывающими результаты работы. Поощряется создание компьютерных моделей, иллюстрирующих различные подходы к решению задачи.

### **Почему это интересно?**

Изучение парадоксов теории вероятности, различных интерпретаций вероятности в разных ситуациях и осознание ограничений используемых математических моделей и методов позволяет более глубоко понимать суть используемых на практике методов анализа дан-

ных и моделирования.

### **Цифровые технологии**

Электронные таблицы, среды для моделирования статистических экспериментов, программные среды для работы с данными.

### **Методика работы с содержанием**

Фронтальное обсуждение основных теоретических понятий и формул, переход от теоретических понятий к их практическим приложениям.

Качество усвоения темы зависит в первую очередь от формирования у учащихся навыка находить практические применения изучаемых понятий.

Для более глубокого усвоения изучаемых понятий и методов рекомендуется использование цифровых средств моделирования статистических экспериментов.

### **Формы деятельности**

Командная работа над проектными заданиями

### **Механизмы контроля и измерения**

Оценка докладов, проектных работ и презентаций.

### **Характер взаимосвязей с другими темами из курса**

Для работы с парадоксами теории вероятностей и математическими моделями необходимо уверенное владение основными понятиями теории вероятностей и сформированные навыки программирования.

### **Межпредметные связи**

Информатика, экономика

### **Метапредметные результаты**

Изучение парадоксов теории вероятностей и ограничений математических моделей позволяет сформировать навыки критического мышления, а также цифровую и математическую грамотность, необходимые для изучения других предметов на более продвинутом уровне.

### **Примеры возможных заданий**

- 1. Парадокс Бертрана** Рассмотрим равносторонний треугольник, вписанный в окружность. Наудачу выбирается хорда окружности. Какова вероятность того, что выбранная хорда длиннее стороны треугольника?
- 2. Задача Монти Холла** Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трёх дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где — козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас — не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2? Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?  
Предлагается в качестве проектного задания рассмотреть различные стратегии ведущего и подсчёт вероятности успеха в каждом из возможных случаев.
- 3. Задача о двух конвертах** Есть два неразличимых конверта с деньгами. В одном находится сумма в два раза большая, чем во втором. Величина

этой суммы неизвестна. Конверты дают двум игрокам. Каждый из них может открыть свой конверт и пересчитать в нём деньги. После этого игроки должны решить: стоит ли обменять свой конверт на чужой?

В качестве проектного задания предлагается рассмотреть историю задачи и различные подходы к решению, в том числе связанные с математической экономикой.

#### 4. Санкт-Петербургский парадокс

Вступая в игру, игрок платит некоторую сумму, а затем подбрасывает монету (вероятность каждого исхода — 50%), пока не выпадет орёл. При выпадении орла игра заканчивается, а игрок получает выигрыш, рассчитанный по следующим правилам. Если орёл выпал при первом броске, игрок получает  $2^0$  дукатов, при втором броске —  $2^1$  дукатов и так далее (при  $n$ -ном броске —  $2^{n-1}$  дукатов). Другими словами, выигрыш, возрастая от броска к броску вдвое, последовательно пробегает степени двойки — 1, 2, 4, 8, 16, 32 и так далее.

Вопрос: при каком вступительном взносе игра становится справедливой?

В качестве проектного задания предлагается рассмотреть различные подходы к разрешению парадокса.

#### 5. Задача о 100 узниках и 100 ящиках

Начальник тюрьмы предлагает ста узникам, приговорённым к смертной казни, последний шанс. Узники пронумерованы от 1 до 100, а комната содержит шкаф со 100 ящиками. Начальник случайным образом помещает в каждый ящик по одному из



номеров от 1 до 100, во все ящики — разные номера. Узники по очереди входят в комнату. Каждый узник может открыть и проверить 50 ящиков в любом порядке. После каждого узника ящики снова закрываются, а все номера остаются в ящиках. Если каждый из узников найдёт в одном из ящиков свой номер, то все узники будут помилованы; если хотя бы один узник не найдёт свой номер, все узники будут казнены. Прежде чем первый узник войдёт в комнату, узники могут обсудить стратегию, но не могут общаться после этого момента. Какова лучшая для узников стратегия?

Подразумевается, что номера узников распределены по ящикам случайно и потому все перестановки номеров узников по ящикам равновероятны.

В качестве проектного задания рекомендуется рассмотреть историю проблемы и возможные подходы к компьютерному моделированию соответствующего статистического эксперимента.

## **7 Распределения случайных величин (9-11 классы)**

### **7.1 Случайная выборка и её представление**

#### **Общее описание**

Понятие случайной выборки является центральным понятием курса. В ходе изучения темы формируется представление о процедуре описания данных эксперимента, в дальнейшем используемых для анализа и прогноза. Тема играет ключевую роль в формировании у учащихся статистической картины мира.

## **Общее количество часов**

8 часов

## **Необходимые условия для изучения темы**

Умение работать с таблицами и диаграммами, базовые навыки критического мышления и сбора данных.

### **Цели**

1. Знакомство с понятиями случайной величины, случайной выборки, полигона частот и генеральной совокупности.
2. Формирование умения строить частотную таблицу.
3. Формирование представления о репрезентативных и нерепрезентативных выборках, а также стандартах описания данных.
4. Формирование первоначальных навыков проверки статистических гипотез.

### **Содержание**

Базовые примеры: стрельба по мишени, успеваемость по определённому предмету, количество членов семьи, вес портфеля, доход, размер обуви и т.п. Подборка примеров опирается на книгу Бунимович Е. А., Булычев В. А. Основы статистики и вероятность. 5-9 кл.: Пособие для общеобразоват. учреждений //М.: Дрофа. – 2004.

### **Почему это интересно?**

Раздел позволяет научиться наглядно представлять результаты исследований и опросов, что представляет практическую ценность как для профессиональной, так и для повседневной деятельности.

## **Цифровые технологии**

Поисковые системы (Yandex, Google), Google-документы, Microsoft Excel, любые инструменты для построения диаграмм и визуализации данных, статистические пакеты (R, SPSS)

### **Методика работы с содержанием**

Обсуждение понятия диаграммы и выбора темы для проекта.

### **Формы деятельности**

Изучение теоретического материала – конспектирование определений основных понятий – случайная величина, случайная выборка, генеральная совокупность, ранжированный ряд, таблица частот, полигон, интервальная таблица частот, гистограмма, накопленные частоты. Рассмотрение базовых примеров – стрельба по мишени, количество членов семьи, вес портфеля, уровень дохода. Творческая и командная работа – обсуждение данных из предлагаемых статистических экспериментов.

### **Механизмы контроля и измерения**

Наблюдение за проектной и командной работой учащихся с последующим обсуждением и публичной защитой результатов проекта.

### **Характер взаимосвязей с другими темами из курса**

Понятие диаграммы служит основой для понятия "Распределение случайной величины изучаемого в дальнейшем.

### **Межпредметные связи**

Русский язык, литература, математика, иностранный язык, история, физическая культура, музыка, технология, предметы естественнонаучного цикла (окружающий мир, биология, физика, химия).

### **Метапредметные результаты**

Развитие навыка описания результатов статистического эксперимента.

### **Примеры возможных заданий**

Представлены в разделе 8 книги Бунимович Е. А., Булычев В. А. Основы статистики и вероятность. 5-9 кл.: Пособие для общеобразоват. учреждений //М.: Дрофа. – 2004.

## **7.2 Характеристики среднего: математическое ожидание**

### **Общее описание**

Раздел посвящён понятию математического ожидания, играющего центральную роль в теории вероятностей.

### **Общее количество часов**

8 часов

### **Необходимые условия для изучения темы**

Уверенное владение понятиями «среднее арифметическое» и «средняя скорость».

### **Цели**

1. Знакомство с понятиями «математическое ожида-

ние», «мода» и «медиана».

2. Решение стандартных задач на вычисление математического ожидания, моды и медианы распределения случайной величины.
3. Умение пользоваться понятием математического ожидания для решения практико-ориентированных задач: понимание возможностей и ограничений теоретико-вероятностных моделей.

### **Содержание**

На базовом примере с кубиком приводится пример подсчёта математического ожидания и разъясняется основной смысл этого понятия. После этого вводится общее понятие математического ожидания, обсуждается пример с лотереей, пример с бросанием трёх монет и пример со средним ростом. Обсуждается взаимосвязь математического ожидания и среднего арифметического, подробно разбирается случай (равновероятные события), когда эти понятия совпадают. После этого рекомендуется в рамках командной или индивидуальной работы выдать учащимся проектные задания на практическое применение математического ожидания. При работе с учащимися с повышенным уровнем подготовки рекомендуется подробно остановиться на изучении линейности математического ожидания, закона больших чисел и неравенства Чебышёва.

#### **Почему это интересно?**

Математическое ожидание применяется в ряде разделов прикладной математики: актуарное дело, финансовое консультирование, бизнес-планирование, медицинская диагностика

## **Цифровые технологии**

Электронные таблицы, среды для моделирования статистических экспериментов.

### **Методика работы с содержанием**

Фронтальное обсуждение основных теоретических понятий и формул, переход от теоретических понятий к их практическим приложениям.

Качество усвоения темы зависит в первую очередь от формирования у учащихся навыка находить практические применения изучаемых понятий.

### **Формы деятельности**

Фронтальная работа, самостоятельное решение задач, в отдельных случаях – проектная работа.

### **Механизмы контроля и измерения**

Компьютерное тестирование и проектная работа по самостоятельному придумыванию задач, публичная защита проектов.

### **Характер взаимосвязей с другими темами из курса**

Понятие математического ожидания позволяет глубже изучать многие предметы социально-экономического и естественнонаучного цикла и может быть использовано в проектной и творческой деятельности.

### **Межпредметные связи**

Русский язык, литература, математика, иностранный язык, история, физическая культура, музыка, технология, предметы естественнонаучного цикла (окружающий мир, биология, физика, химия).

## Метапредметные результаты

Формирование навыка формулирования отрицаний к утверждениям, играющего решающую роль в формировании навыков критического мышления.

### Примеры возможных заданий

Часть заданий заимствованы из книги А.Х. Шеня (Шень А. Вероятность: примеры и задачи).

1. В лотерее на 1% билетов выпадает выигрыш в 200 рублей, на 0,01% билетов выпадает выигрыш в 1000 рублей, а остальные билеты без выигрыша. Найдите средний выигрыш в этой лотерее (в расчёте на один билет), то есть среднее арифметическое выигрышей всех билетов.

2. Опыт состоит в бросании трёх монет и подсчёта числа выпавших орлов; это число считают результатом опыта. Каково будет среднее арифметическое результатов большой серии опытов, если все 8 комбинаций орлов и решек на трёх монетах считать равновероятными?

3. Может ли быть так, что в классе более 90% учеников имеют рост выше среднего?

4. Выберите любой сайт или базу данных, в которой представлены подержанные автомобили. Выберите любую модель и год выпуска и найдите математическое ожидание цены на данную модель с данным годом выпуска. Попробуйте выбрать модель, выпускаемую по крайней мере с 2000 года и сравните математические ожидания цен на данную модель за все годы. Попробуйте предсказать поведение математического ожидания цены для разных моделей. От каких параметров зависят эти математические ожидания? Какие машины дешевеют быстрее всего? Какие медленнее всего? В

чём может заключаться причина этих расхождений?

5. Найдите математическое ожидание цены на квадратный метр жилья в каждом административном округе Москвы, пользуясь открытыми базами данных. Какие параметры влияют на это математическое ожидание?

6. Выберите 5 разных видов деревьев и для каждого из них найдите среднюю продолжительность жизни. Какие параметры влияют на эту продолжительность?

6. Выпишите 10 стран с а) наибольшим ВВП б) наибольшим ВВП на душу населения. Для каждой из выписанных стран найдите отношение среднего и медианного дохода на душу населения. О чём говорят эти отношения?

### **7.3 Характеристики разброса: дисперсия и среднеквадратическое отклонение**

#### **Общее описание**

Раздел посвящён понятию дисперсии, необходимому для изучения темы «Нормальное распределение».

#### **Общее количество часов**

8 часов

#### **Необходимые условия для изучения темы**

#### **Цели**

1. Знакомство с понятиями «дисперсия» и «среднеквадратическое отклонение».
2. Решение стандартных задач на вычисление дисперсии и среднеквадратического отклонения.



3. Умение пользоваться понятием среднеквадратического отклонения для решения практико-ориентированных задач: понимание возможностей и ограничений теоретико-вероятностных моделей.

## Содержание

Обсуждение роли дисперсии в теории вероятностей начинается с разговора о том, что математическое ожидание не полностью характеризует распределение случайной величины. Разные распределения могут иметь одинаковые математические ожидания. Естественным образом возникает вопрос о том, что необходимо параметр распределения, который описывает, насколько сильно значения случайной величины отклоняются от среднего. Некоторые из различий между отдельными измерениями будут положительными (больше среднего), некоторые будут отрицательными (ниже среднего), а некоторые будут нулевыми (в точности равными среднему). Если мы будем считать среднее отклонения, алгебраически складывая отклонения, может получиться нулевое значение, даже в том случае, когда значения случайной величины значительно отклоняются от среднего.

Чтобы решить эту проблему, предлагается рассчитывать среднеквадратическое отклонение. Учащимся предлагается записать следующий алгоритм:

1. Определить среднее арифметическое данного набора чисел
2. Для каждого из чисел выписать разность между этим числом и средним арифметическим
3. Возвести каждую разность в квадрат
4. Сложить квадраты всех разностей
5. Разделить полученное число на число на единицу меньше, чем количество чисел в наборе. Результат деления называется дисперсией случайной величины.
6. Квадратный корень из дисперсии назы-

вается среднеквадратическим отклонением.

В дальнейшем предлагается работать со случайными величинами, вычисляя в каждом конкретном случае математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение данной случайной величины.

### **Почему это интересно?**

Дисперсия, как и математическое ожидание, применяется в ряде разделов прикладной математики: актуарное дело, финансовое консультирование, бизнес-планирование, медицинская диагностика

### **Цифровые технологии**

Электронные таблицы, среды для моделирования статистических экспериментов, программные среды для работы с данными.

### **Методика работы с содержанием**

Фронтальное обсуждение основных теоретических понятий и формул, переход от теоретических понятий к их практическим приложениям.

Качество усвоения темы зависит в первую очередь от формирования у учащихся навыка находить практические применения изучаемых понятий.

### **Формы деятельности**

Фронтальная работа, самостоятельное решение задач, в отдельных случаях – проектная работа.

### **Механизмы контроля и измерения**

Компьютерное тестирование и проектная работа по самостоятельному придумыванию задач, публичная защита проектов.

### **Характер взаимосвязей с другими темами из**

## курса

Понятие дисперсии позволяет глубже изучать многие предметы социально-экономического и естественнонаучного цикла и может быть использовано в проектной и творческой деятельности.

### **Межпредметные связи**

Русский язык, литература, математика, иностранный язык, история, физическая культура, музыка, технология, предметы естественнонаучного цикла (окружающий мир, биология, физика, химия).

### **Метапредметные результаты**

Владение алгоритмом вычисления среднеквадратического отклонения позволяет выполнять творческие и проектные задания по предметам социально-экономического и естественнонаучного цикла.

### **Примеры возможных заданий**

1. Для всех наборов чисел из заданий из предыдущих разделов вычислите не только математическое ожидание, но также дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

2. Сформулируйте и докажите неравенство Чебышёва. Проверьте, выполнено ли оно на практике для изученных ранее распределений случайных величин.

3. \* Почему при вычислении среднеквадратического отклонения рекомендуется делить на  $n - 1$ , а не на  $n$ ? Какие искажения могут возникать при делении на  $n$ ?

4. Выберите интересующую Вас область деятельности и попробуйте собрать как можно больше данных о годовых зарплатах начинающих специалистов в этой области. Для полученной выборки вычислите матема-

тическое ожидание и среднеквадратическое отклонение. О чём говорят полученные данные? Попробуйте сравнить результаты с результатами Ваших одноклассников и друзей.

## **7.4 Распределения случайных величин**

### **Общее описание**

Раздел посвящён изучению основных распределений случайной величины, используемых в естественных и социально-экономических науках.

#### **Общее количество часов**

8 часов

#### **Необходимые условия для изучения темы**

Уверенное владение понятиями случайного эксперимента, гистограммы (столбчатой диаграммы), случайной величины, математического ожидания и дисперсии.

#### **Цели**

1. Знакомство с биномиальным распределением, нормальным распределением и другими распределениями случайных величин, чаще всего встречающимися на практике.
2. Формирование и закрепления навыков вычисления математического ожидания и дисперсии распределений случайных величин.
3. Знакомство с центральной предельной теоремой как инструментом для оценки вероятностей на практике.

## Содержание

Изучение темы начинается с задачи про количество попаданий в баскетбольную корзину в серии из 10 бросков. Сначала учащимся предлагается вычислить вероятность, что баскетболист попадёт в корзину данное количество раз. После этого предлагается построить график распределения и вычислить математическое ожидание и дисперсию для количества попаданий. При работе с учащимися, обладающими достаточной математической и цифровой грамотностью, предлагается смоделировать соответствующий эксперимент с помощью цифровых средств и вычислить программно соответствующие математическое ожидание и дисперсию. В отдельных случаях рекомендуется получить общие формулы, позволяющие вычислить дисперсию и математическое ожидания для произвольных значений вероятности успеха и количества бросков.

После изучения биномиального распределения рекомендуется изучить нормальное распределение на примере распределения людей по росту. Рекомендуется сначала вычислить математическое ожидание и дисперсию на конкретном примере, а после этого рассмотреть общую формулу для нормального распределения и вычислить математическое ожидание в общем случае.

При достаточном уровне математической подготовки учащихся рекомендуется разобрать центральную предельную теорему и проверить её истинность на примерах из практики.

### **Почему это интересно?**

Распределения случайных величин помогают анализировать статистические эксперименты, используемые в естественных и социально-экономических науках. Цен-

тральная предельная теорема позволяет с достаточной степенью точности оценить вероятность, что случайная величина, распределённая по нормальному закону, находится в данном интервале значений.

### **Цифровые технологии**

Электронные таблицы, построители столбчатых диаграмм, средства для визуализации и обработки данных, динамические модели, среды для программирования.

### **Методика работы с содержанием**

Выбор цифровых средств определяется в первую очередь уровнем цифровой и математической грамотности учащихся.

Рекомендуется сделать акцент на компьютерном моделировании статистических экспериментов.

### **Формы деятельности**

Фронтальное обсуждение, групповая и командная работа

### **Механизмы контроля и измерения**

Самостоятельные и контрольные работы, оценка работы в классе, компьютерное тестирование, оценка творческих и проектных работ.

### **Характер взаимосвязей с другими темами из курса**

Навыки работы с распределениями случайных величин позволяют изучать дисциплины естественнонаучного и социально-экономического цикла на более продвинутом уровне.

### **Межпредметные связи**

Физика, экономика, биология

## Метапредметные результаты

Навык проектирования качественных и количественных исследований играет важную роль при работе с данными в любой предметной области.

### Примеры возможных заданий

1. Баскетболист попадает в баскетбольную корзину с вероятностью 0,7. Какова вероятность, что он попадёт ровно 4 раза в серии из 10 бросков? Постройте график распределения случайной величины «количество попаданий в корзину» в серии из 10 бросков. Вычислите математическое ожидание и дисперсию количества попаданий.
2. Постройте диаграмму распределения людей по росту, найдя в Интернете достаточно большой массив данных (для этого можно использовать, в частности, сервис [Dataset Search](#)). Для выбранного массива данных вычислите математическое ожидание и дисперсию. Вычислите, какую часть выборки, составляют люди, рост которых находится в интервале от 1,7 до 1,9 м. Сравните результаты с результатами Ваших коллег. Как оценить эту часть выборки с помощью центральной предельной теоремы? Сравните значение, найденное на основе реальных данных с теоретическим значением. Какие параметры выборки сильнее всего влияют на точность оценки?

## 7.5 Коэффициент корреляции

### Общее описание

Коэффициент корреляции позволяет количественно изучать взаимосвязи между случайными величинами.

#### Общее количество часов

8 часов

#### Необходимые условия для изучения темы

#### Цели

1. Знакомство с понятием ковариации и коэффициента корреляции.
2. Формирование навыков применения линейной регрессии для анализа взаимосвязи между двумя переменными.
3. Понимание ограничений и возможностей метода наименьших квадратов.

#### Содержание

Рекомендуется начинать тему с разговора о взаимосвязях между изучаемыми параметрами и когнитивных искажениях, связанных с неочевидностью существования причинно-следственной связи между двумя данными событиями. (post hoc non propter hoc, correlation is not causation)

Рассматривается алгоритм вычисления коэффициента корреляции для двух наборов чисел, содержащих одинаковое число элементов:

1. Вычислить ковариацию двух данных случайных величин как математическое ожидание произведения



случайных величин, равных отклонениям данных величин от математического ожидания.

2. Вычислить среднеквадратические отклонения двух данных величин.
3. Разделить ковариацию на произведение среднеквадратических отклонений.

После того, как изучен алгоритм подсчёта, рекомендуется на тестовых примерах освоить автоматизированное вычисление коэффициента корреляции с помощью программных средств. Затем, учащиеся самостоятельно выбирают проектные задания для работы (см. задание 3 в конце раздела)

### **Почему это интересно?**

Вычисление коэффициента корреляции является наиболее распространённым способом изучения взаимосвязей между наборами данных. Понятие коэффициента корреляции не требует специальной математической подготовки, основные трудности, связанные с изучением темы – корректная интерпретация полученного значения коэффициента корреляции.

### **Цифровые технологии**

Электронные таблицы, статистические пакеты, онлайн-калькуляторы

### **Методика работы с содержанием**

После фронтального обсуждения и закрепления навыка автоматизации вычисления коэффициента корреляции рекомендуется командная работа над проектными заданиями.

### **Формы деятельности**

Фронтальное обсуждение, работа с цифровыми средствами автоматизации вычислений. проектная и командная работа, поиск информации в интернете

### **Механизмы контроля и измерения**

Компьютерное тестирование или самостоятельные работы, оценка активности в классе, оценка публичных защит проектных заданий.

### **Характер взаимосвязей с другими темами из курса**

Для изучения темы необходимо свободное владение понятием случайной величины и базовая цифровая грамотность, позволяющая автоматизировать вычисление коэффициента корреляции.

### **Межпредметные связи**

Физика, экономика, биология

### **Метапредметные результаты**

Владение алгоритмом вычисления среднеквадратического отклонения позволяет выполнять творческие и проектные задания по предметам социально-экономического и естественнонаучного цикла.

### **Примеры возможных заданий**

1. Вычислите коэффициент корреляции между затратами энергии на обогрев помещения и температурой воздуха. Можете ли Вы объяснить полученное значение?

2. Выберите любое понравившееся Вам кафе и попробуйте получить данные о зависимости между размером чека и чаевыми, которые получают официанты. Найдите коэффициент корреляции между размером чека

и чаевыми. Как Вы думаете, будут ли отличаться результаты в выбранном Вами кафе и других заведениях?

3. Выберите любые два численных набора и вычислите коэффициент корреляции между ними. Попробуйте сделать выводы из полученного значения. Повторите эксперимент а) на данных, между которыми заведомо есть очевидная связь б) на данных, между которыми заведомо нет никакой связи в) на данных, связь между которыми неочевидна. Обсудите результаты с друзьями и представьте результаты своей работы в виде презентации.

## **8 Межпредметные связи. Творческие и проектные задания для старших классов**

Раздел содержит примеры исследовательских и проектных заданий, решения которых учащиеся представляют к защите в свободной форме. Каждое задание предполагает использование практических навыков сбора и анализа данных, в том числе с использованием цифровых средств и аппарата математической статистики.

### **8.1 Экономика и финансы**

1. Гиперинфляция. Наиболее известные прецеденты и их причины.
2. Ключевая ставка и yield curve.
3. Показатели стоимостного риска.
4. Ликвидность активов. Экзогенная и эндогенная волатильность.
5. Скоринговые показатели для облигаций. Методы оценки вероятности технического и амортизационного дефолта.
6. Факторы, влияющие на курсы валют.
7. Финансовая отчётность предприятия: структура и требования.
8. Диверсификация и ребалансировка инвестиционного портфеля.
9. Биржевые индексы.
10. Криптовалюты.

## 8.2 География и логистика

1. Выберите 5 разных видов деревьев и для каждого из них найдите среднюю продолжительность жизни. Какие параметры влияют на эту продолжительность? Можно ли с помощью анализа открытых данных выделить регионы с максимальной средней продолжительностью жизни деревьев?
2. Сколько будет стоить доставить а) 10 тонн б) 100 тонн в) 10000 тонн малины из Марокко в Москву? Используя открытые данные, попробуйте сравнить различные логистические схемы и возможные объёмы рынков сбыта. Какие факторы могут оказывать влияние на стоимость доставки? Какие риски могут возникать в процессе доставки и реализации ягод и фруктов?
3. Составьте рейтинг стран по массе выращиваемых злаков в год. Попробуйте объяснить найденные закономерности с помощью анализа климатических и экономических условий.
4. Составьте рейтинг стран по индексу продовольственной безопасности. От каких факторов внешней и внутренней экономической политики зависит продовольственная безопасность государства?
5. Составьте рейтинг стран по стоимости 1 гектара земель сельскохозяйственного назначения. Какие факторы сильнее всего влияют на динамику цен на землю?
6. Какая часть суши может быть использована для производства продовольствия? Попробуйте по открытым данным установить предельную численность населения Земли с учётом доступных ресурсов и необходимых питательных веществ.

7. Найдите как можно больше отрицательно коррелирующих валютных пар. Какие факторы и события сильнее всего влияют на коэффициент корреляции между валютами?
8. Составьте рейтинг стран по величине ключевой ставки. Попробуйте разбить страны на группы, опираясь на значение ключевой ставки и отношение ключевой ставки к индексу потребительских цен.
9. Выпишите 10 стран с а) наибольшим ВВП б) наибольшим ВВП на душу населения. Для каждой из выписанных стран найдите отношение среднего и медианного дохода на душу населения. О чём говорят эти отношения?
10. Выберите любой химический элемент и составьте рейтинг стран по объёмам а) запасов б) добычи данного химического элемента. Выберите любое государство и с помощью анализа открытых данных опишите структуру импорта и экспорта данного химического элемента. Можете ли Вы предсказать экономический эффект от а) сокращения экспорта б) наращивания экспорта в) сокращения импорта г) наращивания импорта?

### 8.3 Обществознание

1. Составьте рейтинг стран по индексу потребительского доверия. Можно ли выделить ключевые факторы, влияющие на этот индекс?
2. Составьте рейтинг стран по коэффициенту Джини. Можно ли выделить ключевые факторы, влияющие на этот индекс?
3. К каким последствиям может привести переход к формированию государственного бюджета на осно-

вании прямого голосования налогоплательщиков? Попробуйте сделать прогноз на основе открытых данных.

4. Выберите любой агрегатор заявок на покупку и продажу квартир и конкретный регион и найдите как можно больше зависимостей между стоимостью квадратного метра жилья и наличием определённых объектов инфраструктуры в шаговой доступности от объекта недвижимости. Отличаются ли выявленные закономерности в зависимости от региона?
5. Существует ли реальная корреляция между уровнем образования и уровнем дохода? Попробуйте как можно более объективно оценить эту связь, пользуясь открытыми данными.
6. Существует ли реальная корреляция между уровнем образования и политическими взглядами? Попробуйте как можно более объективно оценить эту связь, пользуясь открытыми данными.
7. Существует ли реальная корреляция между генотипом человека и его а) уровнем дохода б) коэффициентом интеллекта в) уровнем образования г) политическими взглядами? Попробуйте как можно более объективно оценить эту связь, пользуясь открытыми данными.
8. Существует ли реальная корреляция между легальной возможностью купить оружие и количеством преступлений в стране на 100000 человек? Попробуйте как можно более объективно оценить эту связь, пользуясь открытыми данными.
9. Существует ли реальная корреляция между уровнем образования и убеждением в эффективности

вакцин против наиболее распространённых заболеваний? Попробуйте как можно более объективно оценить эту связь, пользуясь открытыми данными.

10. Существует ли реальная корреляция между коэффициентом интеллекта и убеждением человека в реальности глобального потепления из-за выбросов углекислого газа? Попробуйте как можно более объективно оценить эту связь, пользуясь открытыми данными.

#### **8.4 Агропромышленный комплекс**

1. По открытым данным сравните эффективность использования существующих минеральных удобрений. Выберите вид сельскохозяйственной культуры, регион и вид удобрений и оцените экономический эффект от использования удобрений в выбранных Вами условиях. Какие риски связаны с использованием минеральных удобрений при выращивании злаков?
2. Выберите регион и оцените вероятность наиболее распространённых стихийных бедствий в этом регионе. Какими методами можно оценивать климатические риски данного региона для сельского хозяйства? Какие данные необходимы для объективной оценки рисков? Найдите информацию о реальных прецедентах потери урожая из-за стихийных бедствий и оцените экономический ущерб для региона в результате этих событий.
3. Выберите любое предприятие, специализирующееся на производстве злаков. Попробуйте оценить реальные расходы предприятия на производство и сравнить их с окончательной стоимостью продук-



ции предприятия. Какими методами можно оценить максимальный объём продаж продукции для данного предприятия? Какие факторы сильнее всего влияют на структуру расходов предприятия? Какими методами можно оценить реализационные риски предприятия?

4. С какими реализационными рисками может сталкиваться животноводческое хозяйство? Выберите регион и вид животных и попробуйте оценить рентабельность нового предприятия в текущих экономических условиях данного региона. Подсчитайте расходы на покупку земли, закупку оборудования, найм рабочей силы, логистику и реализацию продукции. Какое время потребуется для возвращения вложенных в предприятие средств? От каких факторов сильнее всего зависят реализационные риски животноводческого предприятия?
5. Тяжёлое машиностроение и амортизационные расходы сельскохозяйственных предприятий. Производственные риски.
6. Экономический эффект от применения в сельском хозяйстве беспилотников и других средств автоматизации.
7. Качество производимой продукции. Ценовые риски фермерских хозяйств.
8. Производство молочных продуктов.
9. Эффективность использования земель сельскохозяйственного назначения.
10. Экспортная политика государства и её влияние на агропромышленный комплекс.

## 9 Список использованных источников

- Бунимович Е. А., Булычев В. А. Основы статистики и вероятность. 5-9 кл.: Пособие для общеобразоват. учреждений //М.: Дрофа. – 2004.
- Шень А. Вероятность: примеры и задачи. – Litres, 2017.
- Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика. – Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969.
- Глеман М., Варга Т. Вероятность в играх и развлечениях.
- Гасников А. В. и др. Стохастический анализ в задачах //Математическое просвещение. – 2012. – Т. 16. – №. 0. – С. 181-213.
- Бунимович Е. А., Булычев В. А. Вероятность и статистика в курсе математики общеобразовательной школы //М.: Педагогический университет «Первое сентября». – 2005.
- Shackel N. Bertrand's Paradox and the Principle of Indifference //Philosophy of Science. – 2007. – Т. 74. – №. 2. – С. 150-175.
- Семенов А. Л., Поликарпов С. А. ЦИФРОВАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ШКОЛЫ И РОЛЬ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В НЕЙ. ПРОБЛЕМЫ И ПАРАДОКСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ЦИФРОВОЕ РЕШЕНИЕ //Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании. – 2020. – С. 192-200.

- Singer J. D., Willett J. B. Improving the teaching of applied statistics: Putting the data back into data analysis //The American Statistician. – 1990. – T. 44. – №. 3. – С. 223-230.